FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED
UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA

NOVÉ TRENDY VÝUČBY STEREOMETRIE V PRÍPRAVE BUDÚCICH UČITEĽOV MATEMATIKY

zborník príspevkov z vedeckého seminára
organizovaného Katedrou matematiky
dňa 4. novembra 2011

NITRA 2012

Názov: Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky

Zostavovatelia: RNDr. Dušan Vallo, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.

Recenzenti: PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
PaedDr. Soňa Fándlyová, PhD.

Edícia : Prírodovedec č. 492

Schválené: Vedením FPV UKF v Nitre dňa 8. februára 2012

Vydané s finančnou podporou grantu KEGA 038UKF – 4/ 2011 s názvom

„*Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh*“.

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

ISBN **978-80-558-0047-9**

9 788055 800479

OBSAH

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA

UKÁŽKA URČENIA MNOŽINY VŠETKÝCH BODOV DANEJ VLASTNOSTI V PRIESTORE

ONDREJ ŠEDIVÝ – DUŠAN VALLO

ABSTRACT. In this article we present solutions few specific tasks which are concerned with geometric loci of points.

Úvod

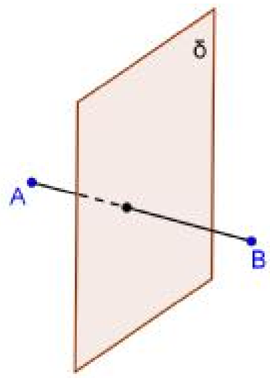
Množinou všetkých bodov danej vlastnosti (geometrické miesto bodov danej vlastnosti) je geometrický útvar U , ktorého body spĺňajú tieto dve požiadavky:

a) Každý bod útvaru U má predpísanú vlastnosť.
b) Každý bod, ktorý má predpísanú vlastnosť, je bodom útvaru U .

Uvedené dve požiadavky vyjadrujú rovnosť dvoch množín: množiny M bodov danej vlastnosti a množiny bodov útvaru U . Dôkazom rovnosti $\mathrm{M}=\mathrm{U}$ potvrdzujeme tvrdenie, že ide o množinu všetkých bodov danej vlastnosti.

Uveďme najdôležitejšie množiny všetkých bodov danej vlastnosti:

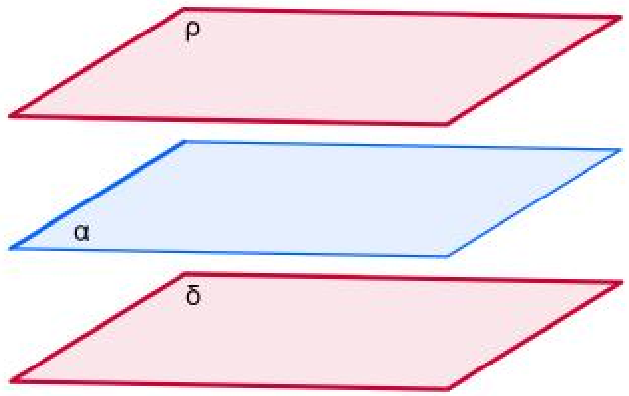
1. Množina všetkých bodov v priestore, ktoré majú od daného bodu S danú vzdialenosť r , je guľová plocha so stredom S a polomerom r , $G[S,r]$.
2. Množina všetkých bodov v priestore rovnako vzdialených od dvoch daných bodov A,B je rovinou súmernosti týchto bodov, t.j. rovina prechádzajúca stredom úsečky AB kolmo na túto úsečku.



Obr. 1

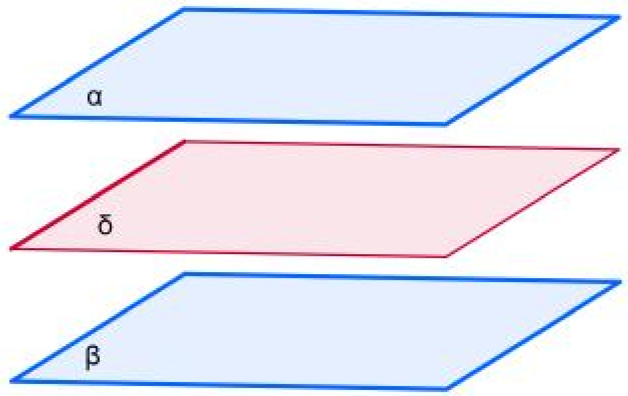
3. Množina všetkých bodov v priestore, ktoré majú od danej roviny a danú vzdialenosť v , sú dve roviny r,d rovnobežné s danou rovinou a vo vzdialenosti v .

Príspevok vznikol za podpory grantu KEGA 038UKF – 4/ 2011 s názvom *Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh.*



Obr. 2

4. Množina všetkých bodov v priestore, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch rovnobežných rovín a, b je rovina d s danými rovinami rovnobežná a je rovinou súmernosti daných dvoch rovín.



Obr. 3

Ukážky úloh

Úloha 1

Určte v priestore množinu všetkých bodov rovnako vzdialených od troch daných bodov A, B, C, ktoré neležia na jednej priamke.

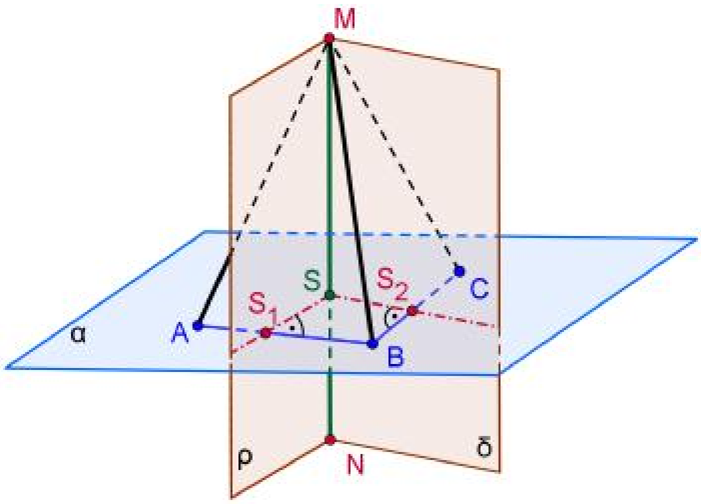
Riešenie.

1. Množina všetkých bodov v priestore, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodov A, B je rovina r, idúca stredom S_1 úsečky AB kolmo na úsečku AB.
2. Množina všetkých bodov v priestore, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodov B, C je rovina d, idúca stredom S_2 úsečky BC kolmo na úsečku BC.
3. Body priesečnice MN rovín r a d majú rovnakú vzdialenosť od bodov A, B, C; ich priesečník S s rovinou trojuholníka ABC je preto stredom kružnice tomu trojuholníku opísanej.

4. Priamka MN je kolmá na rovinu trojuholníka ABC, pretože $AB \perp r$ je $AB \perp MN$, ďalej $BC \perp d$, je $BC \perp MN$, priamky AB, BC sú rôznobežné priamky roviny $\overleftrightarrow{ABC}$.
5. Obrátene, ak bod M je ľubovoľný bod kolmice MN, potom bod M patrí hľadanej množine bodov, pretože $|SA| = |SB| = |SC|$ a pomocou Pytagorovej vety ľahko dokážeme, že $|MA| = |MB| = |MC|$.

Záver.

Množina všetkých bodov v priestore, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od troch daných bodov je priamka zostrojená stredom kružnice prechádzajúcej tromi danými bodmi, kolmo na rovinu tými bodmi určenej.



Obr. 4

Úloha 2

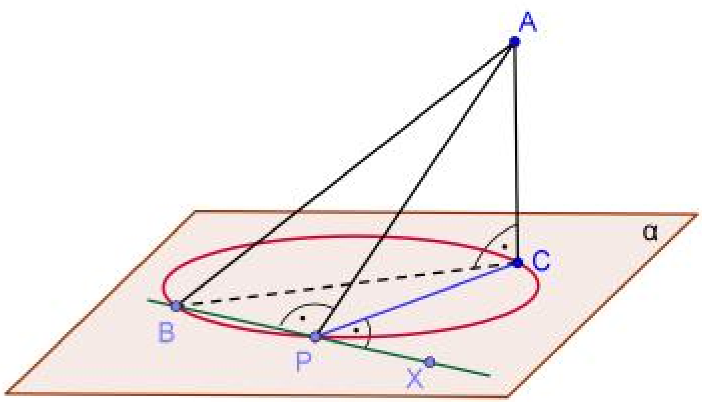
Je daná rovina a, v nej bod B a mimo nej bod A. Určte množinu všetkých piat kolmíc zostrojených z bodu A na všetky priamky ležiace v rovine a idúce bodom B.

Riešenie.

1. Zostrojme bod C, ktorý je pätou kolmice vedenej bodom A na rovinu a.
2. Na ľubovoľnú priamku BX prechádzajúcu bodom B zostrojíme kolmicu z bodu A, jej pätu označíme P; teda $AP \perp BX$.
3. Bod P je bodom hľadanej množiny bodov.
4. Priamka AC je kolmá na rovinu a, potom je kolmá na každú priamku roviny a, teda aj na priamku BX, teda $AC \perp BX$.
5. Pretože sme zostrojili $AP \perp BX$, je priamka BX kolmá na dve rôznobežky AC, AP roviny $\overleftrightarrow{ACP}$, a preto je $BX \perp \overleftrightarrow{ACP}$, potom je aj $BX \perp PC$, čiže $|\mathbf{R}BPC| = 90^\circ$.
6. Podľa Tálesovej vety bod P je bodom kružnice, ktorej priemer je BC.

Záver

Množina piat kolmíc zostrojených z bodu A na všetky priamky prechádzajúce v rovine a bodom B je kružnicou zostrojená v rovine a nad priemerom BC.



Obr. 5

Metodická poznámka

Množina všetkých bodov danej vlastnosti je spredmetnenie vlastnosti, teda vlastnosť geometrických objektov je nahradená množinou všetkých bodov, ktoré tieto vlastnosť spĺňajú.

Určovanie množín všetkých bodov danej vlastnosti vyžaduje experimentovanie a logické narábanie s poznatkami, ktoré patria do konštrukčnej a argumentačnej bázy.

Úlohy na precvičovanie

Úloha 3. *Určte množinu všetkých stredov guľových plôch, ktoré prechádzajú danými tromi rôznymi bodmi A, B, C neležiacimi na jednej priamke.*

[Výsledok: Priamka kolmá na rovinu $a \equiv \overleftrightarrow{ABC}$, ktorá prechádza stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC.]

Úloha 4. *Sú dané rovnobežné roviny a, b $(a \neq b)$. Určte množinu všetkých stredov všetkých úsečiek , z nich každá má jeden krajný bod v rovine a a druhý krajný bod v rovine b .*

[Výsledok: Rovina súmernosti d rovnobežná s danými rovinami rovinovej vrstvy určenej rovinami a, b .]

Úloha 5. *Sú dané dve mimobežné priamky a, b. Určte množinu stredov všetkých úsečiek, z ktorých každá má jeden krajný bod na priamke a, druhý krajný bod na priamke b.*

[Výsledok: Rovina súmernosti d najkratšej priečky XY daných dvoch mimobežiek $(d \perp XY)$.]

LITERATÚRA

[1] H' Adamar, J.: Lécons de géomtrie élémentaire. (ruský preklad) Elementarnaja geometria II, Stereometria. Moskva 1958

prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: osedivy@ukf.sk, dvallo@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA

SIETE KOCKY – AKÉ A KOĽKO?

DUŠAN VALLO – ONDREJ ŠEDIVÝ

ABSTRACT. In this article we present a genesis of the cube nets by using the handling activity by models of squares. We are concerned with some combinatoric strategy how to find all cube nets.

Úvod

Príspevok má didaktický charakter a pokúsime sa v ňom pomocou určenia všetkých možností analyzovať siete kocky. Podľa [1] za **sieť** *n*-stena považujeme množinu mnohouholníkov zhodných s jeho stenami, ktoré sú vhodne umiestnené v rovine tak, že ich zložením dostaneme hranicu *n*-stena.

Treba poznamenať, že ide o „intuitívne“ zavedenie pojmu siete, nakoľko nie je exaktne vymedzené, čo rozumieme pod slovným spojením *„vhodne umiestnené v rovine“*, ako aj nie je jasné, čo sa myslí pod *„zložením“*.

Učitelia matematiky na základnej škole často do výučby stereometrického učiva zaraďujú aj známu manipulačno – experimentálnu aktivitu akou je vytvorenie modelu siete z telesa z papiera. V tejto súvislosti náš príspevok nadväzuje na uvedenú aktivitu, pričom ponúka učiteľom zopár námetov na tvorbu rôznych sietí kocky.

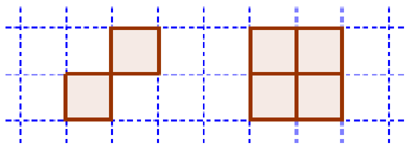
Upozorňujeme, že v článku používame mnohé vyjadrenia, ktoré nie sú exaktne matematické, avšak pomerne výstižne popisujú podstatu zdôraznenej manipulačnej činnosti, ktorá môže byť sprevádzaná konkrétnou manipuláciu s papierovými modelmi štvorcov, resp. inými vhodnými stavebnicovými dielikmi.

Štvorcová mriežka a jednotkové štvorce

V rovine si zostrojíme štvorcovú mriežku. Do tejto mriežky budeme vhodne umiestňovať *jednotkové* štvorce tak, že:

a) vrcholy štvorcov sú mrežovými bodmi,
b) vybrané dvojice štvorcov majú spoločnú stranu.

Na obr. 1. sú naznačené „uloženia“ štvorcov (útvary), ktorými sa nebudeme zaoberať. Dôvod je jednoduchý. Nie je možné útvar považovať za sieť kocky.



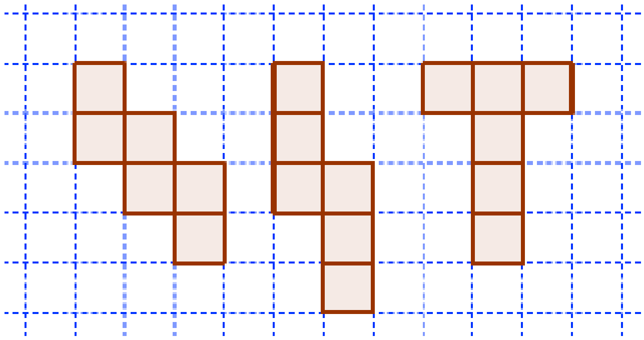
Obr. 1

Kvôli jednoduchšie skúmaniu možných sietí kocky zavedieme nasledovne označenie. Ak na sieti kocky identifikujeme obdĺžnik, ktorého rozmery sú v pomere *4:1*, povieme, že pôjde o *sieť dĺžky štyri*. Ak na sieti existuje obdĺžnik s pomerom dĺžok strán *3:1* a na tej

Príspevok vznikol za podpory grantu KEGA 038UKF – 4/ 2011 s názvom *Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh.*

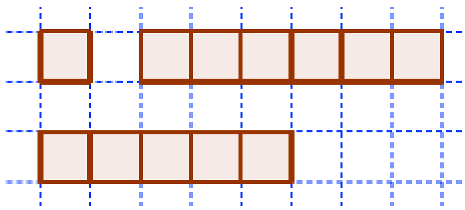
iste sieti už neexistuje väčší obdĺžnik, povieme, že *sieť* má *dĺžku tri*. Obdobne sa určuje sieť kocky *dĺžky dva*.

Na obr. 2 sú naznačené siete kocky postupne dĺžok 2,3 a 4. Vidíme, že za dĺžku siete kocky považujeme *maximum* z dĺžok strán obdĺžnikov, ktoré existujú na danej sieti.



Obr. 2

Z logických dôvodov nemá zmysel uvažovať o dĺžkach 1 (samostatné štvorce). Obdĺžniky s pomerom dĺžok strán *5:1*, resp. *6:1*, tiež nie sú sieťami kocky.



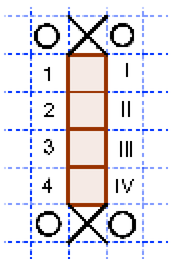
Obr. 3

Siete kocky dĺžky 4

Začneme so sieťami kocky dĺžky 4, pretože sú najjednoduchšie.

Zostrojíme obdĺžnik s pomerom dĺžok strán *4:1*, ktorý rozdelíme na štyri navzájom zhodné štvorce. Umiestnime obdĺžnik do štvorcovej mriežky a označíme si „voľné pozície“ tak, ako je na obr. 4.

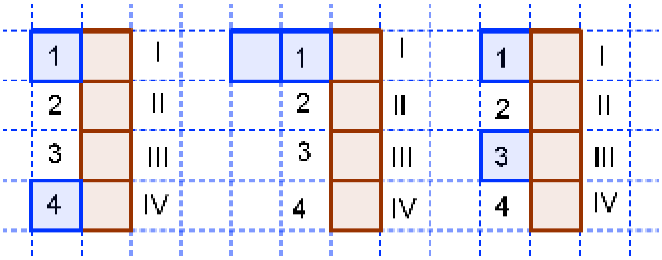
Poznámka. Umiestnením ďalšieho štvorca do pozície označenej krížikom dostaneme obdĺžnik s pomerom dĺžok strán 5:1, čo nie je vhodné. Pozície označené krúžkom sú také, ktoré vylučujú umiestnenie štvorca, pretože by štvorce boli incidentné len s jedným vrcholom. Ostatné pozície po „ľavej strane “ daného obdĺžnika sme označili postupne arabskými číslicami 1,2,3 a 4; po „strane pravej“ zase rímskymi číslicami ako I, II, III a IV.



Obr. 4

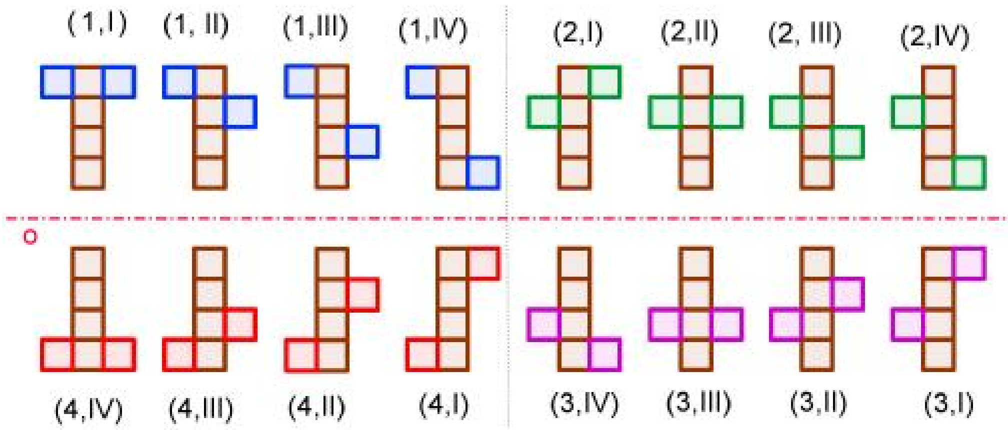
Je zrejmé, že daný obdĺžnik musíme doplniť ešte dvomi štvorcami. To môžeme urobiť dvomi spôsobmi:

a) oba štvorce umiestnime „vľavo“, resp. „vpravo“. Niektoré možnosti sú naznačené na obr. 5. Vo všetkých 20-tich prípadoch nejde o sieť kocky.



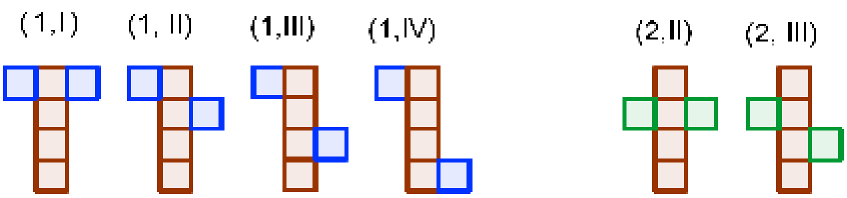
Obr. 5

b) Štvorce „uložíme“ tak, že jeden umiestnime „vľavo“ a druhý „vpravo“. Máme 16 možností. Týchto 16 variácií popíšeme ako usporiadané dvojice, v ktorých prvá zložka je určená arabskou číslicou *1,2,3* alebo *4;* druhá zložka zase rímskou číslicou *I, II, III, IV.* Každý osemuholník je sieťou kocky. Vylúčime útvary, ktoré sú navzájom zhodné.



Obr. 6

Z obr. 6 je vidno vzťah osovej súmernosti medzi osemuholníkmi. Neuvažujeme teda útvary z „dolného“ riadku. Útvary $(1,I),(1,II),(1,III)$, $(1,IV)$ sú štyri navzájom rôzne siete kocky a za totožné siete kocky považujeme osemuholníky $(1,II)\equiv(2,I)$, $(1,III)\equiv(2,IV)$. **Existuje 6 sietí kocky** ***dĺžky 4.***

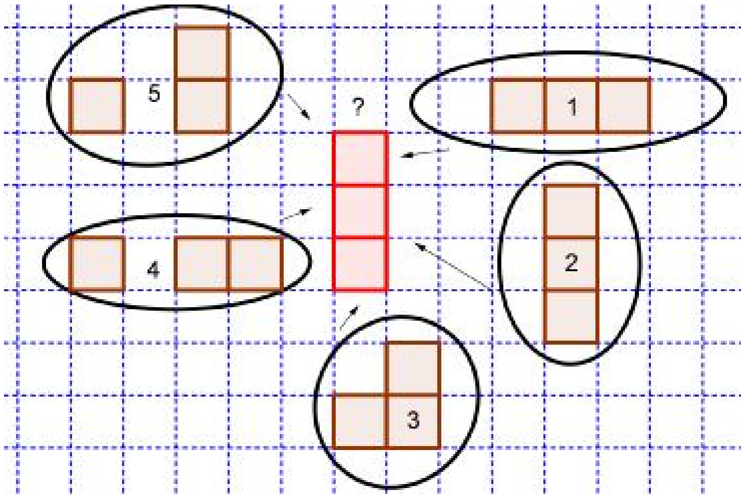


Obr. 7

Poznámka. V ďalšom texte budeme navzájom zhodné útvary ako potenciálne siete kocky vynechávať.

Siete kocky dĺžky 3

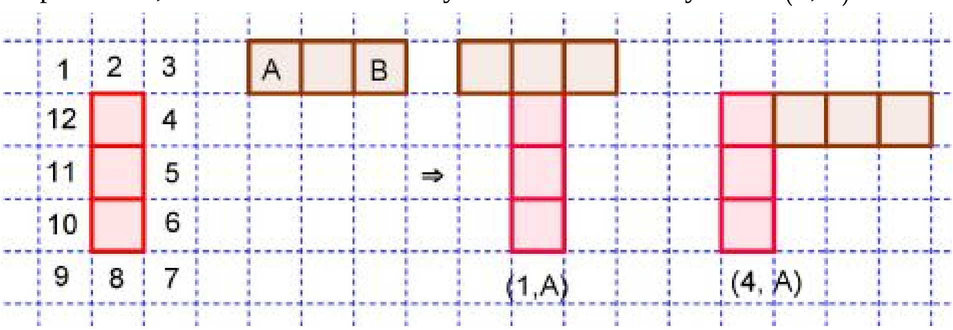
So sieťami dĺžky 3 je situácia komplikovanejšia.
Začneme „základným“ obdĺžnikom s pomerom dĺžok strán *3:1*. Zvyšné 3 štvorce možno usporiadať do útvarov na symbolickom obr. 8, čím máme 5 hlavných množín s možnosťami ako doplniť „základný“ obdĺžnik na potenciálnu sieť kocky. Preveríme jednotlivé možnosti.



Obr. 8

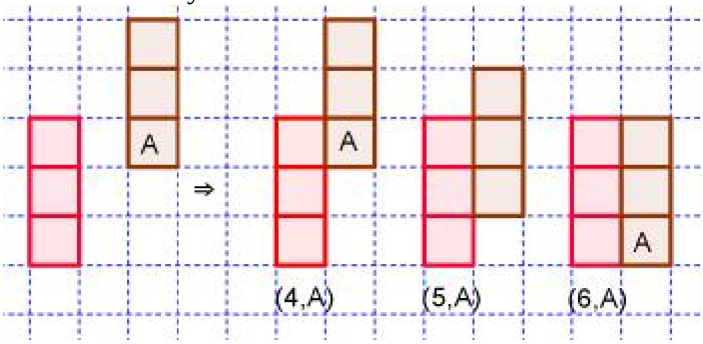
Analyzujme jednotlivé možnosti

1. V mriežke označíme jednotlivé „voľné“ pozície číslicami *1,2, ..., 12* a „základný“ obdĺžnik nebudeme posúvať. Vhodným posunutím druhého obdĺžnika dostávame útvary, ktorých dĺžka je 4. Ak sú medzi nimi siete kocky, potom sme ich našli v predchádzajúcich úvahách a teda ďalej s týmito možnosťami ***neuvažujeme***.
Na obr. 9 sme na ukážku vhodne posunuli obdĺžnik so štvorcom označeným ako *A* na pozície *1* a *4.* Je zrejmé, že vhodným posunutím obdĺžnika tak, že štvorec označený ako *B* bude na pozícii *12,* dostaneme útvar zhodný s útvarom označeným ako $(4, A)$ atď.



Obr. 9

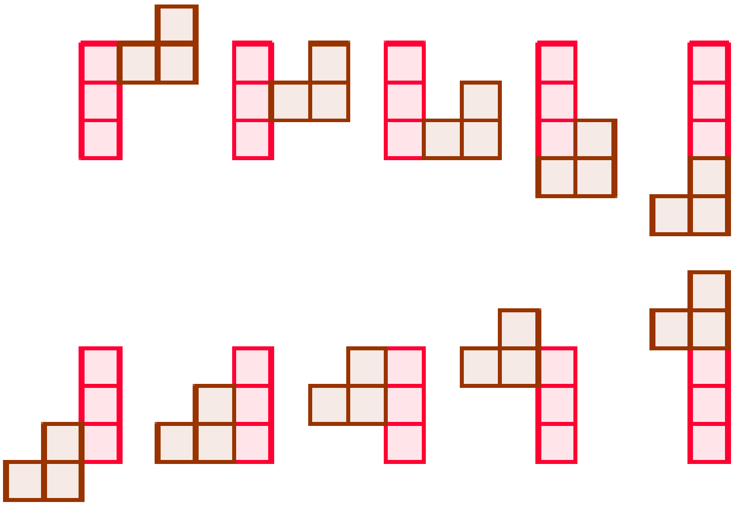
2. Vhodným posunutím druhého obdĺžnika dostaneme nasledovné možnosti, z ktorých sme vylúčili navzájom zhodné útvary.



Obr.10

Siedmou sieťou kocky dĺžky 3 je iba útvar označený ako $(4, A)$. Ako sme uviedli úvodom, možnosti $(5, A),(6, A)$ nemôžu byť sieťami kocky.

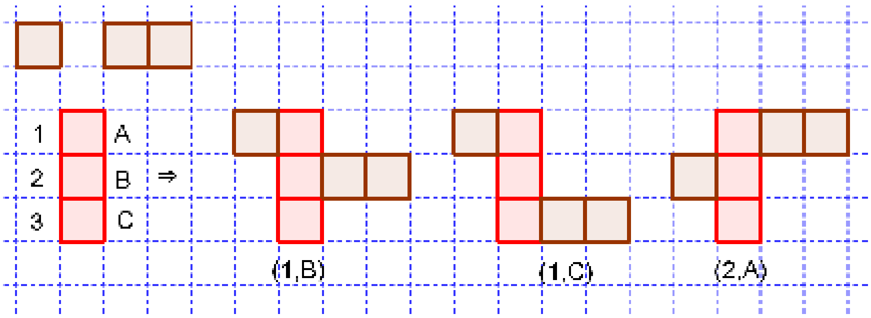
3. Vhodnými posunutiami nekonvexného šesťuholníka z tretej množiny dostaneme tieto útvary, z ktorých žiadny nie je sieťou kocky.



Obr.11

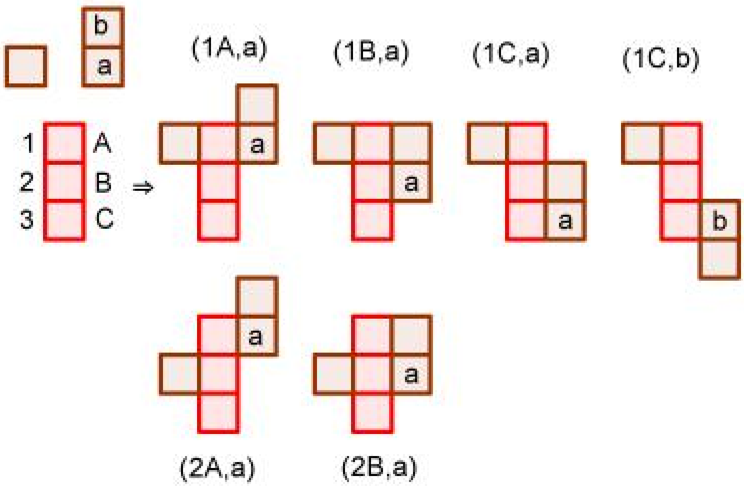
4. Označíme jednotlivé „voľné pozície“ tak, ako je naznačené obr. 12. Z možností $(1, A),(2, B)$ a $(3, C)$ dostávame potenciálne siete kocky dĺžky 4, čo sme už uvažovali. Tie teraz neberieme do úvahy.

Vynechaním navzájom zhodných útvarov dostávame len tri možnosti na obr. 12, z ktorých **ôsmou sieťou** kocky dĺžky 3 je iba desaťuholník $(1, B)$.



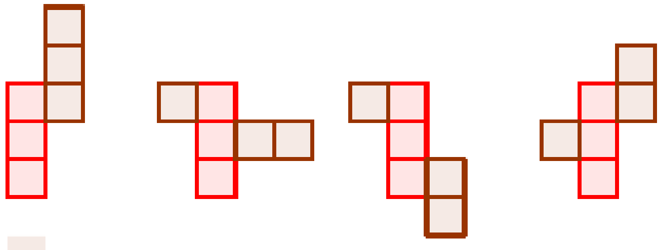
Obr.12

5. Označíme jednotlivé „voľné pozície“ a zavedieme pomocné doplnkové označenie *a, b* podľa obr. 13. Vynechaním navzájom zhodných útvarov dostávame možnosti, z ktorých sú siete kocky $(1A,a),(1C,b),(2A,a)$. Útvar $(1A,a)$ je však zhodný s desaťuholníkom $(1,B)$ z predchádzajúceho prípadu. Zostali nám teda len **dve** ďalšie **siete kocky** *dĺžky* 3označené ako $(1C,b),(2A,a)$.



Obr.13

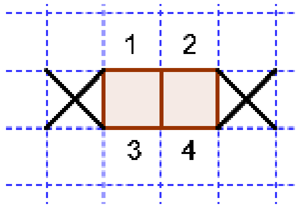
Záverom konštatujeme, že **existujú štyri** siete kocky *dĺžky* 3, ktoré sú na obr. 14.



Obr.14

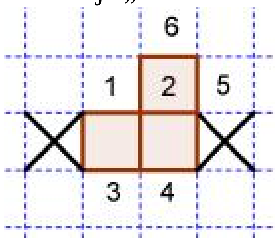
Siete kocky dĺžky 2

Konštrukcia siete kocky dĺžky dva, je jednoduchá. Začneme s obdĺžnikom, ktorého pomer dĺžok strán je *2:1*. Umiestnením štvorca do niektorej z pozícií označenej krížikom (obr. 15) dostaneme potenciálnu sieť dĺžky 3. Do úvahy tak prichádza iba jedna z pozícii označených ako *1,2,3* alebo *4.*



Obr.15

Ak zvolíme možnosť *2*, ďalší štvorec môžeme pridať len do pozície *5*, pretože v pozícii *6* by sme dostali „sieť" dĺžky 3 a pozícia *1* je „zakázaná" v úvode.



Obr.16

Obdobná situácia je v aj nasledujúcich krokoch. Jediná možnosť, kam môžeme doplniť ďalší štvorec, je do pozície *7* a nakoniec do pozície *9* ako vidno na obr. 17.

Obr.17

Útvar na obr. 17 je **jedenástou** sieťou kocky a ide o jedinú sieť *dĺžky 2.*

Záver

V príspevku sme sa zamerali na genézu tvorby sietí kocky. Zvolili sme konštruktívno - kombinatorický prístup k problematike, keď sme analyzovali jednotlivé možnosti. Zaviedli sme pomocný pojem dĺžky siete kocky a dospeli k záveru, že existuje 11 navzájom rôznych sietí kocky, ktoré sú dĺžok 4, 3 a 2.

LITERATÚRA

[1] Medek, V. a kol.: *Matematická terminológia*, SPN Bratislava, 1975

[2] Vankúš, P. (2007): *Rozvoj matematických vedomostí žiakov prostredníctvom didaktických hier*, In: Zborník príspevkov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory FMFI UK, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, ISBN 978-80-89186-18-1, s. 77–80.

[3] Vallo, D. – Šedivý, O.: *Mnohosteny. Cesta k rozvoju geometrických predstáv*. FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 418, Nitra, 2010. ISBN: 978-80-8094-735-4, s. 108

[4] Vankúš, P. (2006): *Didaktická hra vo vyučovaní matematiky*, In: *Matematika v škole dnes a zajtra*, Ružomberok, Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity, ISBN 80-8084-066-0, s. 283–286.

[5] Kohanová I.: *Metóda problem solving v príprave budúcich učiteľov matematiky*, Acta Mathematica, Vol. 13, Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, 2010, p. 127-132

[6] Kohanová I., Slavíčková M.: *Development of Pedagogical Content Knowledge in preparation of future mathematics' teachers*, IMEM Congress 2009, Ružomberok: Catholic University, 2009, p. 572-581

[7] Gay, D. *Geometry by Discovery*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998, ISBN: 0-471-04177-7, p. 410

[8] Regecová, M. – Slavíčková, M.: *Dynamický softvér v príprave budúcich učiteľov matematiky*. In: Nové trendy v teórii vyučovania matematiky. Dynamický softvér vo vyučovaní. Zborník príspevkov z vedeckého seminára. FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 443, ISBN: 978-80-8094-853-5, s. 46 – 54.

prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: osedivy@ukf.sk, dvallo@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA

UČEBNÉ POMÔCKY VO VYUČOVANÍ STEREOMETRIE

MÁRIA GABAJOVÁ, PETER VANKÚŠ

ABSTRACT. In this article we present three material teaching tools for teaching of solid geometry at primary and lower secondary school. Described teaching tools and activities give to pupils needed manipulative experience. Article serves as inspiration for teachers and students to be teachers to use our activities and teaching tools.

Úvod

Človek sa na začiatku svojho života učí hlavne skúsenosťou. Pre dieťa je prirodzené všetko si vyskúšať, ohmatať. Po príchode do školy sa učenie mení z učenia skúsenosťou na prevažne učenie čítaním či počúvaním. Teda z prevažne učenia sa hmatom a telesnou aktivitou sa prechádza k verbálnemu učeniu detí. Avšak z pohľadu napríklad Gardnerových rozličných druhov inteligencie (Blaško, 2011) je pre mnohé deti tento prechod pomerne zložitý a učiteľ by sa mal snažiť uľahčiť ho. Jednou z možností je využívanie rôznych materiálnych učebných pomôcok. Samozrejme, aby sa pomôcka stala učebnou je dôležité, aby spĺňala niekoľko podmienok (Dostál, 2007):

1) mali by žiaka motivovať a zaujať,
2) musí podporovať realizáciu edukačného cieľa, ktorý sledujeme,
3) mala by byť primeraná veku a psychickému vývoju žiakov a ich doterajším skúsenostiam a vedomostiam,
4) mala by byť primeraná podmienkam realizácie (vybavenie triedy, školy), ale aj skúsenostiam a zručnostiam vyučujúceho.

Vhodné učebné pomôcky môžu byť veľmi efektívnym pomocníkom pre učiteľa. Cieľom predkladaného článku je potom opísať používanie konkrétnych učebných pomôcok v rámci aktivít začlenených do vyučovania stereometrie na základnej škole. Článok má slúžiť učiteľom a študentom učiteľstva ako inšpirácia na používanie takýchto pomôcok v edukácii.

Učebné pomôcky vo vyučovaní stereometrie

Počas vyučovania matematiky na 1. stupni základnej školy sa žiaci majú oboznámiť so základnými geometrickými útvarmi. Pre túto vekovú kategóriu je však len opísanie útvaru a ukázanie jeho zobrazenia nedostatočné. Žiaci doslova potrebujú „nabrať skúsenosť" s daným útvarom, lebo hoci sa deti často krát s ním už stretli, nebolo to v matematickom kontexte.

Nasleduje opis konkrétnych aktivít využívajúcich manipuláciu s učebnými pomôckami. Aktivity boli odskúšané so žiakmi vo veku 10-11 rokov, v triedach s počtom žiakov od 15 do 25, počas hodín matematiky.

Tvoríme kocku a kváder: Cieľom tejto aktivity bolo lepšie oboznámenie žiakov so štruktúrou geometrických útvarov. Pred aktivitou sme sa so žiakmi rozprávali, čo je to kocka a kváder, aké majú vlastnosti, koľko majú hrán, stien a vrcholov. Potom každé dieťa držalo v ruke model kocky a kvádra a počítalo jednotlivé význačné prvky (steny, hrany a vrcholy). Nasledovala samotná aktivita, v rámci ktorej mali žiaci zostrojiť model kocky a kvádra použitím plastelíny a špajlí. Je vhodné ak každé dieťa skúsi pracovať samé. Pri

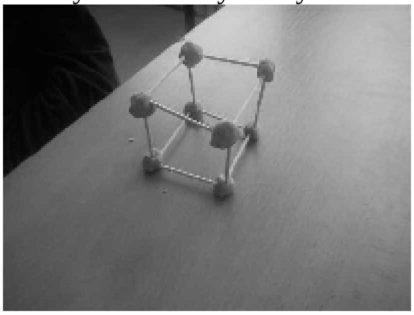
Tento príspevok vznikol v rámci grantu MŠVVaŠ SR KEGA č. 057UK-4/2011

vyrábaní kocky žiaci pracujú pomerne rýchlo a zvyčajne im netreba žiadnu pomoc. Niektorým však môžu pomôcť otázky:

Koľko guľôčok z plastelíny budeme potrebovať?

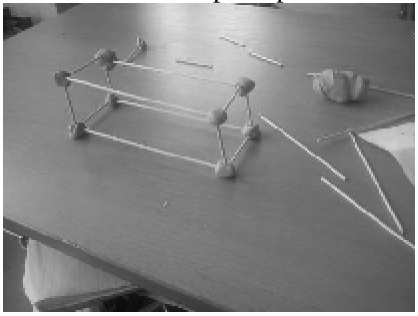
Koľko paličiek musíte nalámať a aké dlhé by mali byť?

Samozrejme nie všetky deti vedia správnu odpoveď a učiteľ deťom ani nemusí správnu odpoveď poskytnúť. Deti počas samotnej stavby začínajú zisťovať, že im chýba nejaká guľka z plastelíny, alebo špajľa. Počas nami odskúšanej aktivity sa postupne všetkým žiakom podarilo postaviť kocku samostatne (obr. 1). Kocky neboli dokonalé a preto sme sa žiakov spýtali prečo to nie je presná kocka. Sami zhodnotili, že paličky nenalámali presne alebo guľky z plastelíny neboli rovnaké. Na záver sme si zopakovali koľko vrcholov a hrán má kocka a aké geometrické útvary tvoria steny kocky.



Obrázok 1

Pri vytváraní kvádra nastali pre žiakov problémy. Hoci žiaci vedeli, že je potrebných osem plastelínových guľôčok, nevedeli si poradiť s tým koľko a aké dlhé majú byť paličky tvoriace hrany. Síce vedeli, že kváder má hrán 12 a niektoré sú rovnaké, ale nevedeli si ďalej poradiť. Opýtali sme sa teda, ktoré z hrán sú rovnaké. Odpovedali, že tie čo tvoria výšku a teda, že musia byť 4, podobne aj šírku a dĺžku. Niektorým žiakom sa ale stále nedarilo vytvoriť kváder. Ďalšia nápovedná otázka bola z akých útvarov sú tvorené steny. Žiaci odpovedali: „Obdĺžniky.“ Spýtali sme sa či sú všetky obdĺžniky rovnaké. Na to odpovedali: „Hore a dole je rovnaký, tie bočné sú rovnaké a vpredu a vzadu sú rovnaké.“ Toto uvedomenie im dostatočne pomohlo k tomu, aby dokázali vyrobiť kváder. Začali spodnou podstavou, teda vytvorili si obdĺžnik a postupne dotvorili kváder (obr. 2).

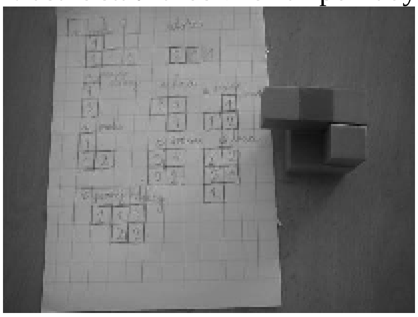


Obrázok 2

Na záver sme si teda ešte raz zopakovali z akých prvkov sa kváder skladá. Pozitívnym dôsledkom bolo, že sami žiaci, bez toho, aby sme ich na to zvlášť upozorňovali, začali do svojho slovníka zaraďovať pojmy: vrchol, hrana a stena.

Námetom na diskusiu v tomto prípade môže byť, načo sú nám vlastne kocky, kvádre a všetky ostatné geometrické útvary, keď v bežnom živote sa s nimi stretneme málokde. Žiaci odpovedali, že napríklad hoci skriňa nie je dokonalý kváder a má všelijaké výstupky a kľučky, niekedy napríklad pri plánovaní izby ju môžeme za dokonalý kváder považovať.

Kreslenie plánikov a SOMA kocka: K tejto aktivite sú potrebné dieliky hlavolamu SOMA kocky a štvorčekový papier. Cieľom bolo, aby si žiaci uvedomili rôzne pohľady na predmet. Na začiatok sme vybrali jeden dielik SOMA kocky, každý žiak ho mal položený pred sebou a kreslili sme si spolu pohľady spredu, sprava, zľava, zozadu, zhora, zdola. Potom sme vytvorili stavbu z dvoch dielikov a urobili sme obdobné plániky. Žiaci si zároveň vpisovali do jednotlivých štvorčekov, koľko kociek je „schovaných" za danou kockou. Sami žiaci zistili, že dvojice pohľadov spredu a zozadu, z bočných strán a z hora a zdola sú rovnaké. Preto nám vlastne stačí urobiť len tri pohľady (obr. 3).



Obrázok 3

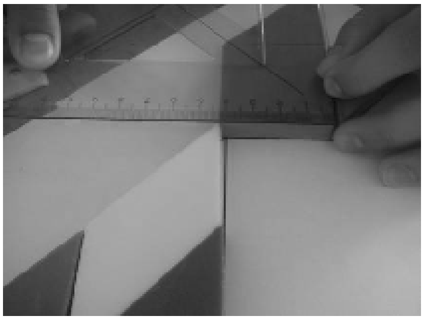
Taktiež si uvedomili, že pri akomkoľvek pohľade musí byť celkový počet kociek rovnaký. Teda, keď spočítajú čísla v jednotlivých štvorčekoch, výsledok musí byť stále ten istý.

V nasledujúcej fáze aktivity si už žiaci sami vytvárali svoje stavby a robili jednotlivé pohľady. Veľmi ich to bavilo a čím zložitejší útvar vyrobili, tým viac sa im to páčilo.

Pri tejto aktivite sa žiaci trochu viac pohybujú okolo lavíc, čo je pre deti s prevládajúcou pohybovou inteligenciou istým uvoľnením, zároveň získavajú informácie pre seba vhodnejším spôsobom ako napríklad keď by ich získavali iba počúvaním.

Touto aktivitou si žiaci rozvíjajú priestorovú predstavivosť, učia sa, že objekt z rôznych strán môže vyzerať rôzne, učia sa kresliť plány, čo je zručnosť, ktorú využijú aj v bežnom živote.

Počítanie obvodov s využitím Tangramu: Počítane obvodu trojuholníka a obdĺžnika je súčasťou učebných osnov 4. ročníka základnej školy. Priblíženie daného učiva žiakom môžeme urobiť využitím skladačky Tangram, respektíve jeho jednotlivých dielikov. My sme využili Tangram, ktorého dieliky majú hrúbku približne 1 cm. Deti v rámci aktivity merali dĺžky jednotlivých hrán dielikov skladačky (obr. 4), zapísali si výsledky do zošita a následne počítali obvody rovinných útvarov tvorených danými hranami.



Obrázok 4

Prekvapením pre deti bolo, že im navzájom vyšli rôzne výsledky. Snažili sme sa teda spoločne dopátrať k tomu, kde nastala chyba a či vôbec k nejakej chybe došlo, aj keď sú výsledky rôzne. Pri porovnaní jednotlivých nameraných dĺžok hrán Tangramu žiaci zistili, že nie každý má rovnaký výsledok. Otázka teda bola prečo. Odpovedali, že jednotlivé dĺžky hrán sa nedajú odmerať s úplnou presnosťou a teda každý napísal len približný výsledok. V tomto bode sa dá so žiakmi diskutovať o presnosti merania, zaokrúhľovaní čísel a o tom, kedy je vhodné len približné meranie a kedy potrebujeme väčšiu presnosť. Ako príklad sme použili meranie vzdialenosti miest pre dopravné účely a chirurgickú operáciu, pri ktorej je dôležitá presnosť na milimetre a niekedy ešte aj menej.

Tým, že žiaci mali počas aktivity počítať obvody rôznych stien dieliku Tangramu, deti si uvedomili, že nie je nutné premeriavať vždy znovu všetky dĺžky hrán, pretože niektoré sú rovnaké. Žiaci, ak si chceli uľahčiť prácu, boli „nútení“ uvedomovať si niektoré vlastnosti kolmých hranolov, bez toho, aby boli vopred na to nejako upozorňovaní.

Záver

V rámci článku sme opísali tri konkrétne aktivity slúžiace na vyučovanie stereometrie s použitím učebných pomôcok. Opísané aktivity majú slúžiť ako inšpirácia pre učiteľov a študentov učiteľstva na ich použitie v rámci edukácie. Iné vhodné aktivity nájde čitateľ v literatúre (Fulier a Šedivý, 2001; Pavlovičová a Švecová, 2009; Pavlovičová, Rumanová a Vidermanová, 2010; Kohanová, 2010; Koreňová, 2010; Regecová a Slavíčková, 2010; Vallo, 2009; Vallo, Záhorská a Ďuriš, 2010).

Počas jednotlivých aktivít je vhodné si uvedomiť, že cieľom učiteľa nie je naučiť žiaka ako správne pracovať s učebnými pomôckami, ale cieľom je lepšie pochopenie niektorých matematických poznatkov. Zároveň pri chybách, ktoré sa môžu v rámci jednotlivých aktivít vyskytnúť, môžeme poukázať na to ako tieto chyby odstrániť, alebo vysvetliť v rámci daného kontextu.

LITERATÚRA

[1] Blaško, M.: *Úvod do modernej didaktiky I.*, Košice, Katedra inžinierskej pedagogiky Technická univerzita, 2011

[2] Dostál, J.: *Učební pomůcky a uplatňování zásady názornosti v moderním vzdělávání*, In: International Colloquium on the Management of Educational Process, Brno: UO, 2007, ISBN 978-80-7231-228-3

[3] Fulier, J. – Šedivý, O.: *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*, Edícia Prírodovedec, publikácia č. 87, Nitra, 2001, ISBN 80-8050-445-8

[4] Pavlovičová, G., Švecová, V.: *Pracovné dielne z geometrie*, Nitra, Fakulta prírodných vied UKF, 2009, ISBN 978-80-8094-566-4

[5] Pavlovičová, G., Rumanová, L., Vidermanová, K.: *Zábavné úlohy z geometrie*, Nitra, Fakulta prírodných vied UKF, 2010, ISBN 978-80-8094-789-7

[6] Kohanová, I.: *Metóda problem solving v príprave budúcich učiteľov matematiky*, Acta Mathematica, Vol. 13., Nitra, Univerzita Konštantína Filozofa, 2010, ISBN 978-80-8094-781-1, s. 127-132

[7] Koreňová, L.: *Digitálna podpora vyučovania matematiky na strednej odbornej škole*, In: Teaching Mathematics II: Innovation, New Trends, Research, Ružomberok, Catholic University in Ružomberok Press, 2010, ISBN 978- 80-8084-645-9, s. 70-79

[8] Regecová, M. – Slavíčková, M.: *Financial Literacy of Graduated Students*, Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics, Issue 10, Bratislava, Univerzita Komenského, 2010, ISBN 978-80-223-2904-0, s. 121-147

[9] Vallo, Dušan: *Rôzne metódy riešenia jednej úlohy*, Matematika, fyzika, informatika, 18, 7, 2009, ISSN 1210-1761, s. 396-407

[10] Vallo, D., Záhorská, J., Ďuriš, V.: *Aspects interactive software Geogebra in geometric*, Nové trendy v teórii vyučovania matematiky. Dynamický softvér vo vyučovaní, Nitra, FPV UKF v Nitre, 2010, ISBN 978-80-8094-853-5, s. 65-71

Mgr. Mária Gabajová
PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina.
842 48 Bratislava
e-mail: gabajova@fmph.uniba.sk
e-mail: peter.vankus@gmail.com

AKO UČIŤ STEREOMETRIU NA GYMNÁZIÁCH POMOCOU VOĽNE DOSTUPNÉHO SOFTVÉRU

IVETA KOHANOVÁ

ABSTRACT. In this paper we describe possible ways how to teach selected parts of solid geometry in upper secondary schools in accordance with lately published textbooks. Firstly we focus on different views (top, front and side view), in the second part we deal with cutting a cube by a plane.

Stereometria v ŠVP

V súvislosti s ostatnou školskou reformou z roku 2008 sa na základných i stredných školách zmenila obsahová náplň viacerých predmetov, matematiku nevynímajúc. Zámerom autorov bolo priblížiť žiakom matematiku viac z praktického hľadiska, aby mali schopnosť a ochotu používať matematické modely myslenia (logické a priestorové myslenie) a prezentácie (vzorce, modely, diagramy, grafy, tabuľky). [1] Vzdelávací obsah predmetu bol rozdelený do piatich tematických okruhov. Stereometria je súčasťou okruhu *Geometria a meranie*, v rámci ktorého žiaci na gymnáziách: „skúmajú a objavujú rovinné a priestorové útvary a ich vlastnosti. Odhadom, meraním i výpočtom určujú obsahy, povrchy a objemy. Riešia polohové a metrické úlohy z bežnej reality. Dôležité miesto má rozvoj priestorovej predstavivosti.“ V súvislosti s týmto okruhom ŠPÚ definoval cieľ učebného predmetu, ktorého hlavnou myšlienkou je, aby proces vzdelania smeroval k tomu, že žiaci si rozvíjajú svoju schopnosť orientácie v rovine a priestore a priestorovú predstavivosť. Ako je učiteľskej verejnosti známe, ŠVP je písaný zoširoka a mnohokrát si učiteľ nevie celkom predstaviť, čo konkrétne mali autori na mysli. Možno trošku detailnejšiu predstavu nám dá Výkonový štandard, ktorý definuje, čo by žiaci po prebratí Stereometrie mali vedieť:

- v rovnobežnom premietaní načrtnúť kváder alebo jednoduché teleso zložené z malého počtu kvádrov,
- nakresliť bokorys a pôdorys jednoduchých útvarov zložených z kvádrov,
- pozná príklady iných spôsobov znázorňovania priestoru (napr. vrstevnice alebo lineárna perspektíva),
- používať spôsoby dvojrozmernej reprezentácie priestoru pri riešení jednoduchých úloh,
- vypočítať povrch a objem telies pomocou daných vzorcov vrátane jednoduchých prípadov, keď je potrebné niektoré údaje dopočítať z ostatných údajov,
- v jednoduchých prípadoch zobraziť rez telesa rovinou,
- pozná súvislosti rezu guľou so súradnicovým systémom,
- riešiť jednoduché úlohy vyžadujúce priestorovú predstavivosť.

Novinkou, ktorú sme pred reformou na gymnáziách (takmer vôbec) neučili, je kreslenie bokorysov, pôdorysov a nárysov telies; či iné spôsoby znázorňovania priestoru do roviny (lineárna perspektíva, vrstevnice). Tieto novinky síce podľa [2] nie sú súčasťou cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky, no špeciálne zakresľovanie rôznych pohľadov na teleso do roviny má v sebe potenciál na rozvíjanie

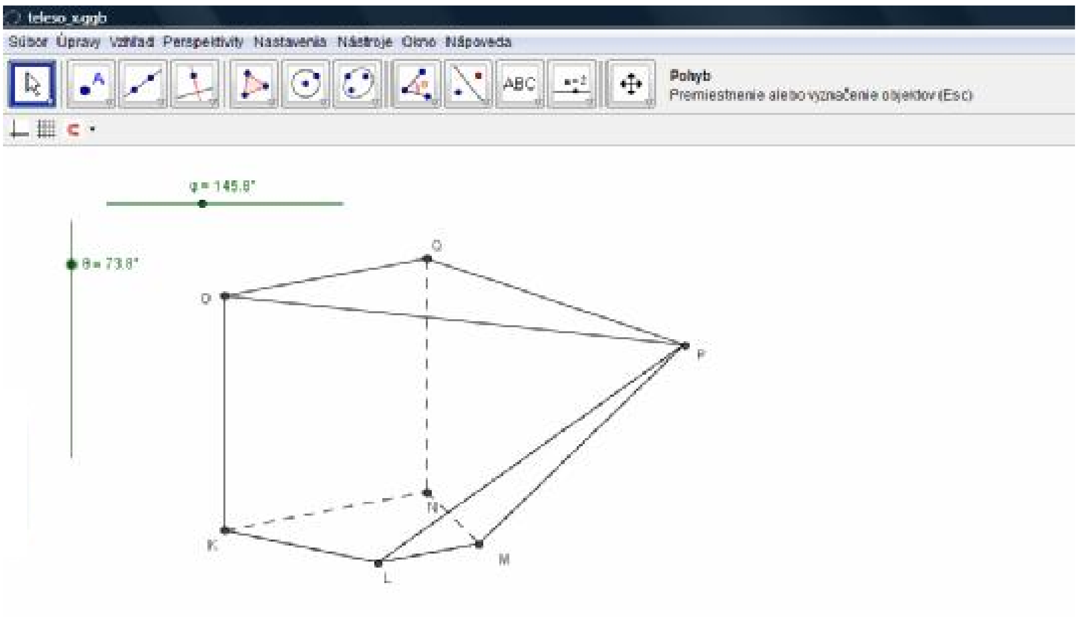
Tento príspevok vznikol v rámci grantu MŠVVaŠ SR KEGA č. 001UJS-4/2011

žiackej priestorovej predstavivosti, ktorá je neskôr dôležitá aj pri zobrazovaní rezu telesa rovinou. Práve týmto dvom témam sa v nasledujúcom texte budeme podrobnejšie venovať.

Bokorysy, pôdorysy a nárysy

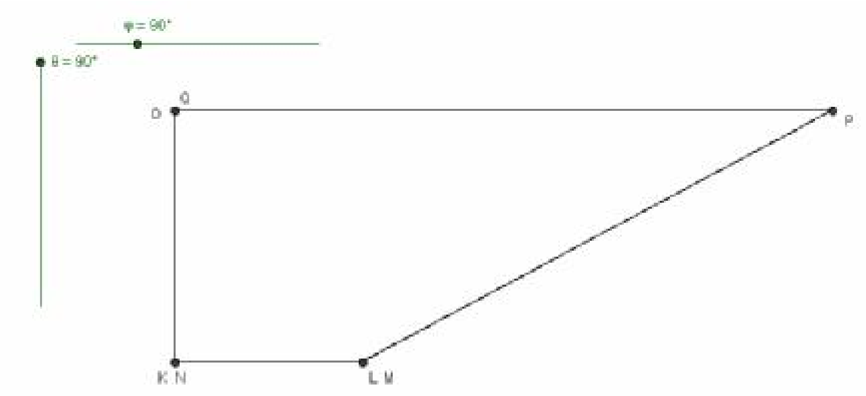
V novej učebnici matematiky pre 1. ročník gymnázií [3] sa autor bokorysom, nárysom a pôdorysom venuje na stranách 74 – 77, v rámci kapitoly 10 nazvanej Zobrazujeme priestor. V učebnici sú tieto pojmy veľmi pekne vysvetlené, ako aj ich potreba a využitie v praxi. Z našej osobnej skúsenosti s vyučovaním tejto témy na Gymnáziu Grösslingová v Bratislave je však pre žiakov potrebných viac príkladov na precvičenie ako len tie, ktoré sú v spomínanej učebnici. Veľmi sa nám osvedčila práca s modelmi (rôzne škatuľky od cukroviniek alebo menších prístrojov), ako i práca s voľne dostupným softvérom alebo appletmi. Uvedieme pár príkladov:

Úloha 1: Načrtnite nárys, bokorys a a pôdorys daného telesa KLMNOPQ.

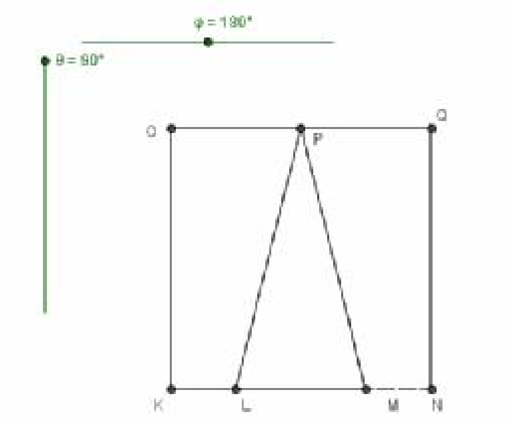


Obrázok 1: Teleso KLMNOPQ

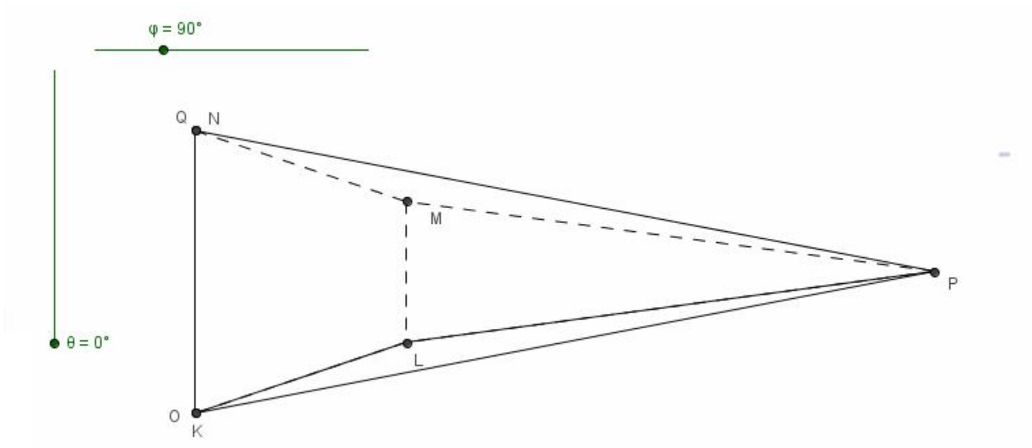
Pomocou voľne dostupného softvéru dynamickej matematiky GeoGebra si žiaci mohli vyskúšať „manipuláciu“ s týmto telesom, pootáčať si ho v rôznych smeroch pomocou vopred pripravených posuvníkov a získať požadované pohľady:



Obrázok 2a: Teleso KLMNOPQ v náryse

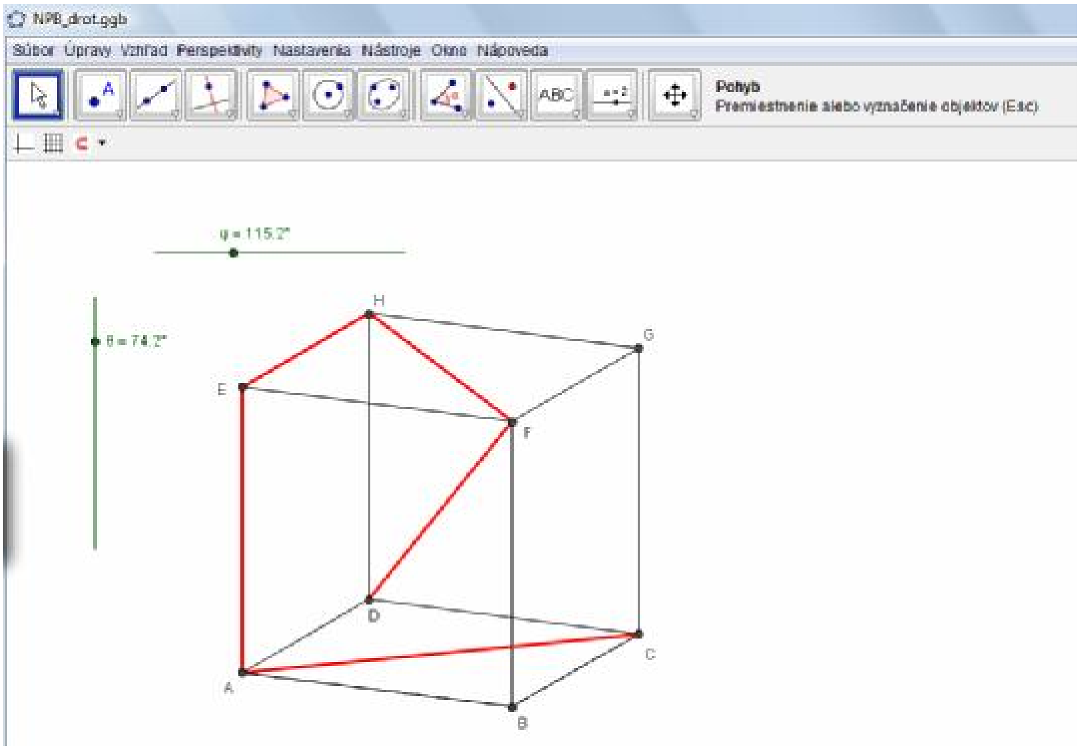


Obrázok 2b: Teleso KLMNOPQ v pravom bokoryse



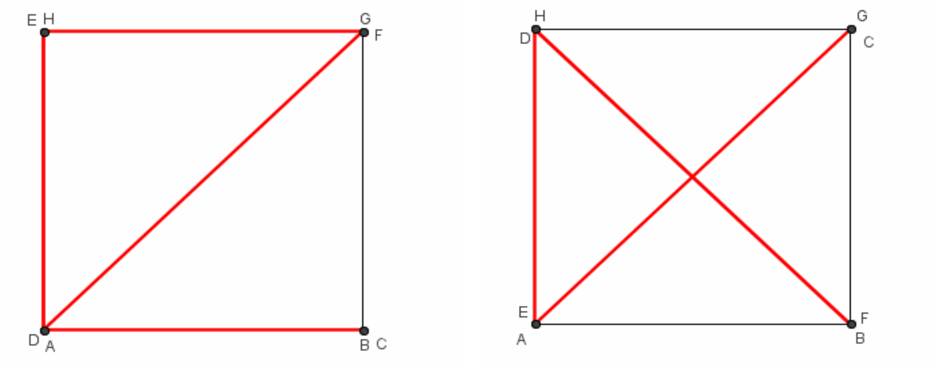
Obrázok 2c: Teleso KLMNOPQ v pôdoryse

Úloha 2: Na drôtenom modeli kocky ABCDEFGH sme červeným drôtom pospájali niektoré vrcholy tak, ako je to vyznačené na obrázku. Nakreslite, ako vidno tento červený drôt spredu, zhora, sprava a zľava.

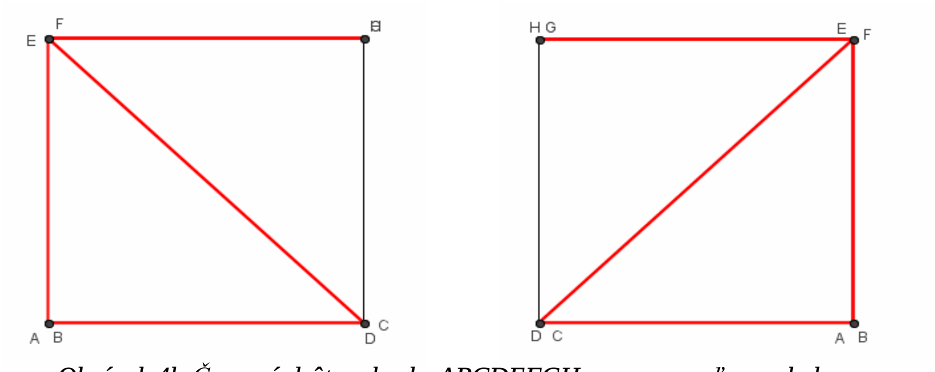


Obrázok 3:Červený drôt na kocke ABCDEFGH

Pri riešení tejto úlohy si mali žiaci možnosť všimnúť, aký je rozdiel medzi pravým a ľavým bokorysom (aj keď protiľahlé steny telesa sú zhodné). Opäť sme vo voľne dostupnom softvéri dynamickej matematiky GeoGebra nakreslili všetky štyri požadované pohľady.

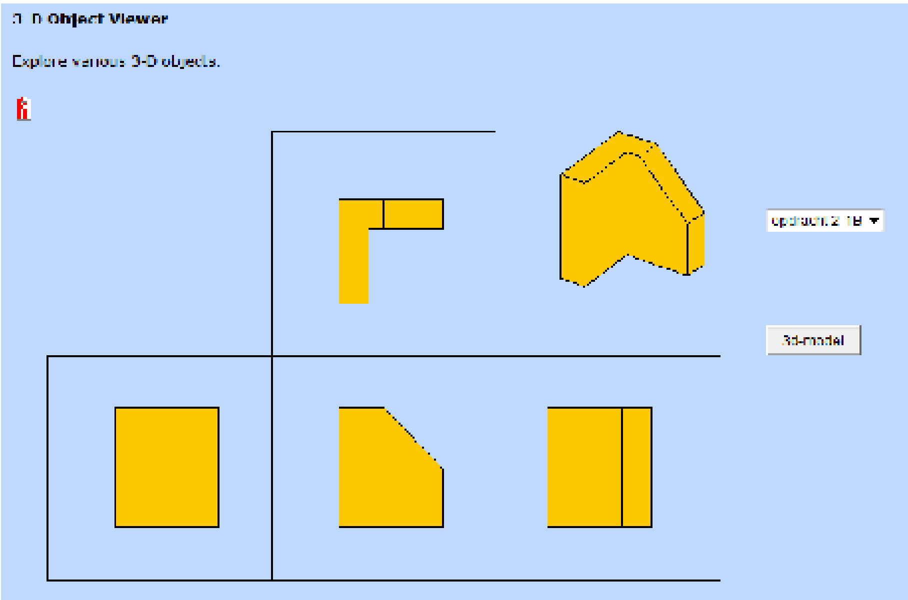


Obrázok 4a:Červený drôt na kocke ABCDEFGH v náryse a pôdoryse



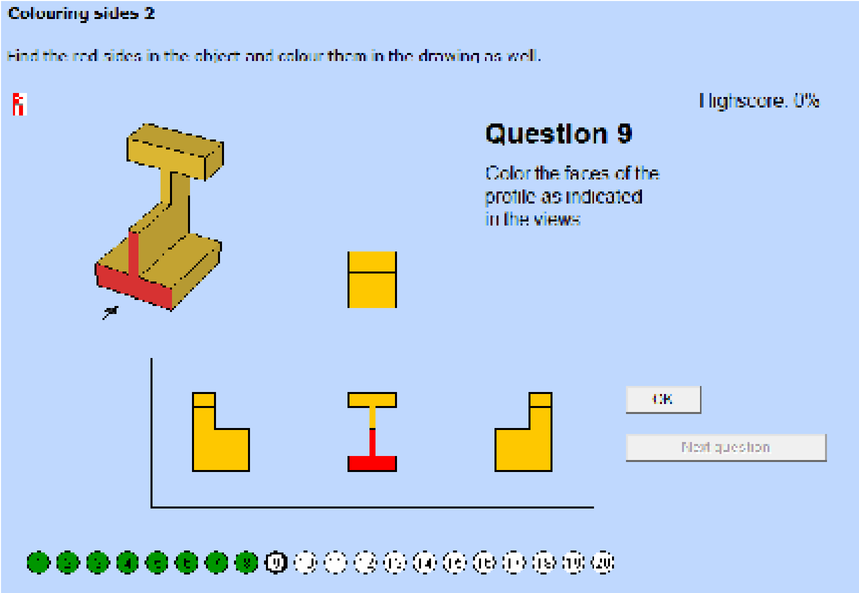
Obrázok 4b:Červený drôt na kocke ABCDEFGH v pravom a ľavom bokoryse

Ak v škole nemáme k dispozícii počítač pre každého žiaka (resp. pre dvojicu), vystačíme si pri týchto úlohách aj s jedným počítačom s pripojením na Internet a dataprojektorom. Takáto forma práce nám na hodine ušetrí dosť času v porovnaní s tým, keby sme telesá kreslili na tabuľu a máme viac času pre poskytovanie spätnej väzby žiakom. Dostatočná séria voľne dostupných appletov na precvičovanie kreslenia rôznych pohľadov na teleso (a aj opačnej procedúry) je napríklad súčasťou webovej stránky WisWeb, čo je webová stránka Freudenthalovho Inštitútu v Holandsku [4]. V applete *3-D Object Viewer* po kliknutí na tlačidlo "3D-model" zobrazíme iba teleso a preklikávaním sa cez vyššie umiestnené rozbaľovacie menu meníme tvar telesa. Ak chceme zobraziť rôzne pohľady, tak zatlačíme tlačidlo "Drawing".



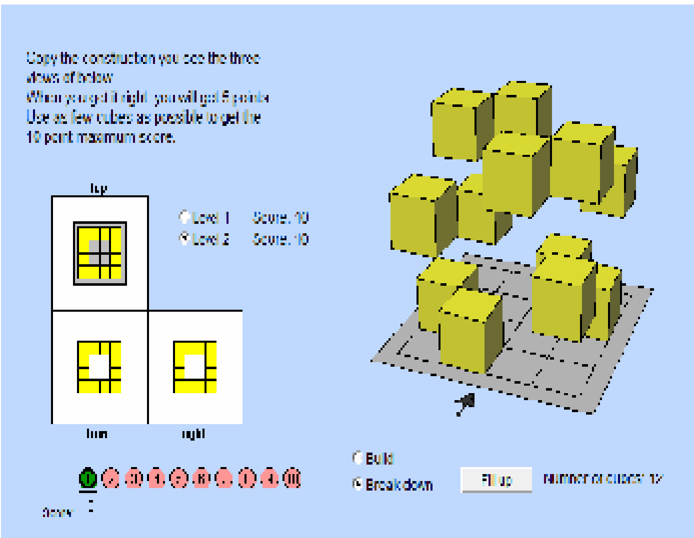
Obrázok 5:Applet 3-D Object Viewer

Gradáciou predchádzajúceho appletu je applet *Colouring sides 1*, ktorý vyžaduje od žiakov označiť v náryse, pôdoryse alebo bokoryse tú stenu, ktorá je na telese zafarbená na červeno. Ďalšou úrovňou tejto série je applet *Colouring sides 2*, kde musia žiaci v telese označiť tú stenu, ktorá je v jednom z pohľadov zafarbená na červeno. V oboch prípadoch applet poskytuje spätnú väzbu, či označená stena bola správna.



Obrázok 6:Applet Colouring sides 2

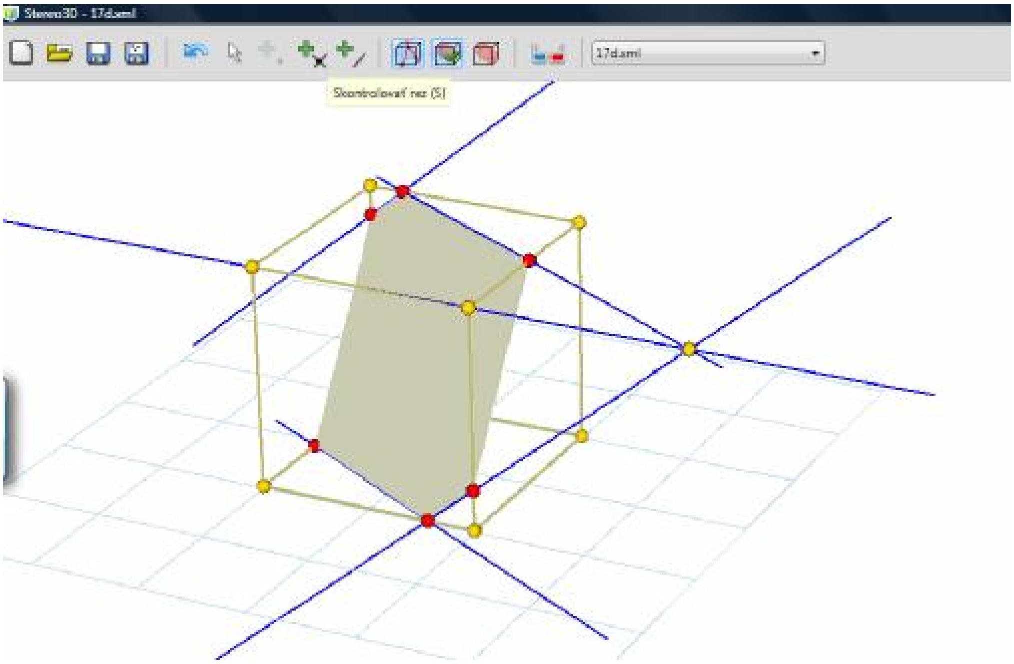
Náročnejšou úlohou pre žiakov je zväčša opačný proces, teda na základe pôdorysu, nárysu a bokorysu telesa toto teleso skonštruovať (nakresliť). Výborným prostriedkom na takéto precvičovanie sa nám osvedčil tiež applet už z vyššie spomínanej stránky WisWeb, konkrétne applet *Building houses with side views*, v ktorom majú žiaci postaviť dom na základe troch rôznych pohľadov. Applet opäť poskytuje spätnú väzbu. Ak žiak postaví správny dom, dostáva 5 bodov, pričom môže získať až 10 bodov, ak použije čo najmenší možný počet kociek.



Obrázok 6:Applet Colouring sides 2

Rez kocky rovinou

Tento tematicky celok sa v novej učebnici [5] nachádza v kapitole 3, nazvanej Kocky, rezy a priestorová predstavivosť. Samotný text, ako i farebné prevedenie učebnice podporuje a uľahčuje žiakom pochopiť o čo vlastne ide. V tomto prípade učebnica poskytuje celkom slušnú zbierku príkladov, no i v tomto prípade sa nám osvedčila doplnková práca s voľne dostupným softvérom – GeoGebra a Stereo3D, ktoré pomáhajú žiakom rozvíjať si priestorovú predstavivosť. Druhý uvádzaný softvér [6] bol v akademickom roku 2010/11 obhájený ako diplomová práca Bc. Michala Sokolského, študenta FIIT STU v Bratislave. Tento softvér bol počas jeho tvorby testovaný našimi žiakmi práve pri preberaní rezov kocky rovinou. Jeho výhodou oproti iným, podobne zameraným softvérom je, že učiteľ v ňom dokáže veľmi jednoducho definovať nové zadania (3 body roviny), tie uložiť (do predpripraveného priečinku Priklady, ktorý sa nachádza v rozpakovanom priečinku Stereo3D/dotnet_4_0/Stereo3D) a následne si ich študent z menu rýchleho načítania (vpravo hore) dokáže otvoriť. Tento softvér taktiež dokáže skontrolovať rez pomocou tlačidla *Skontrolovať rez* (ak je správny, zafarbí sa na zeleno, ak nesprávny, na červeno) a tiež ukázať rez pomocou tlačidla *Ukázať rez*. Tieto dva prvky programu sú obzvlášť výhodné pri samoštúdiu žiakov, keď im nemá kto poradiť, pomôcť.



Obrázok 7:Riešenie úlohy 17d, strana 76 z učebnice [5] v programe Stereo3D

Ľavým tlačidlom myši dokážeme kocku v nákresni premiestňovať, pravým tlačidlom ju otáčať (a tak vidieť rez z rôznych pohľadov) a skrolovacím kolieskom ju zväčšovať, resp. zmenšovať. Toto ovládanie je intuitívne, naši žiaci ho objavili bez toho, aby čítali nejaký manuál alebo sme im niečo o ovládaní povedali.

Záver

Ostatné kurikulárne zmeny priniesli do vyučovania matematiky na gymnáziách niekoľko nových partií (napríklad Finančnú matematiku [7]), niektoré témy boli redukované a niektoré naopak rozšírené, no vždy s cieľom poukázania na využiteľnosť v praktickom živote. Okrem nami uvádzaných častí stereometrie, ktoré sú novinkou tak pre žiaka, ako i pre učiteľa, cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky obsahujú aj ďalšie požiadavky týkajúce sa napríklad sietí telies, ktorým sa venujú aj autori Vallo, Záhorská a Ďuriš [8] alebo Vankúš [9]. Myslíme si, že manipulácia s objektmi, hoci aj za pomoci vhodných dynamických softvérov, či appletov, ktoré boli v článku prezentované, je pre žiakov stimulujúca a umožňuje im získať potrebné vedomosti a zručnosti nenúteným spôsobom a taktiež rozvíjať si svoju priestorovú predstavivosť.

LITERATÚRA

[1] Štátny pedagogický ústav: *Štátny vzdelávací program, Matematika, Príloha ISCED 3A*, Bratislava, 2009

[2] Štátny pedagogický ústav: *Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky*, Bratislava, 2009

[3] Kubáček Z.: *Matematika pre 1. ročník gymnázií – 2. časť*, Bratislava, SPN – Mladé letá, 2010, ISBN 978-80-10-01827-7

[4] WisWeb, *Applets*, dostupné na internete, [cit. 2011-11-1], http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/welcome.html

[5] Kubáček Z.: *Matematika pre druhý ročník gymnázií – prvá časť*, Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2009, ISBN 978-80-7158-983-9

[6] Sokolský M.: *Stereo3D*, dostupné na internete, [cit. 2011-11-1], http://clira.sk/ftp/yankee/Stereo3D.zip

[7] Regecová M., Slavíčková M.: *Dynamický softvér v príprave budúcich učiteľov Matematiky*, Nové trendy v teórii vyučovania matematiky - Dynamický softvér vo vyučovaní, Zborník príspevkov z vedeckého seminára organizovaného Katedrou matematiky, Nitra, 2011, ISBN 978-80-8094-853-5

[8] Vallo D., Záhorská J., Ďuriš V.: *Objavujeme sieť štvorstena*, Acta Mathematica 14, Zborník príspevkov z IX. nitrianskej matematickej konferencie, UKF Nitra, 2011, ISBN 978-80-8094-958-7

[9] Vankúš P.: *Zbierka didaktických hier určených pre vyučovanie matematiky na druhom stupni základnej školy*, KEC FMFI UK, Bratislava 2010, ISBN 978-80-89186-61-7.

PaedDr. Iveta Kohanová, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina

SK – 842 48 Bratislava
e-mail: kohanova@fmph.uniba.sk

GEOMETRIA V PREGRADUÁLNEJ PRÍPRAVE UČITEĽOV - ELEMENTARISTOV

IVETA SCHOLTZOVÁ – MAREK MOKRIŠ

ABSTRACT. At the Faculty of Education of University of Prešov in the study Pre-school and Elementary Education is the sekond stage study carried out a study program Primary School Education. Geometry with Didactics is a part of the mathematical education.

1 Úvod

Súčasťou matematickej prípravy budúcich učiteľov pre primárny stupeň škôl je tiež geometria. V posledných rokoch sa aj táto časť vzdelávacieho procesu realizuje s podporou e-learningu. Viacročné skúsenosti ukazujú, že elektronická podpora matematickej edukácie je efektívnou súčasťou pregraduálnej prípravy učiteľov pre primárny stupeň vzdelávania. Vyučovanie geometrie prostredníctvom nástrojov dynamickej geometrie v kombinácii s interaktívnou tabuľou nadobúda dôležité postavenie vo vyučovacom procese. E-vzdelávanie sa stáva neoddeliteľnou súčasťou pregraduálnej prípravy a prispieva k rozvíjaniu matematickej a príslušnej odborovodidaktickej kompetencie budúceho učiteľa.

2 Geometria s didaktikou

Odborná geometrická príprava budúcich učiteľov pre primárny stupeň vzdelávania, doplnená aj o didaktickú interpretáciu učiva na 1. stupni základných škôl, je v podmienkach Pedagogickej fakulty Prešovskej univerzity v Prešove realizovaná najmä prostredníctvom predmetu Geometria s didaktikou. V tejto disciplíne je výučba uskutočňovaná v dvoch rovinách:

1) ako prezenčný predmet s časovou dotáciou 1 hodina prednáška a dvojhodinový seminár v dennej forme štúdia,
2) ako elektronický podporný kurz spracovaný v LMS Moodle.

Tieto dve súčasti pregraduálnej prípravy budúcich učiteľov v oblasti elementárnej geometrie sa navzájom dopĺňajú.

Cieľom predmetu Geometria s didaktikou je systematizovať vedomosti z geometrie získané počas školského vzdelávania a doplniť ich o nové poznatky, pozitívne ovplyvňovať postoje študentov ku geometrii a získať schopnosť didakticky interpretovať poznatky z geometrie do vyučovania geometrie v primárnej škole. To všetko má smerovať k rozvíjaniu gramotnosti študentov v geometrickej oblasti a k rozvíjaniu ich didaktických zručnosti.

Prezenčná výučba predmetu je štruktúrovaná do nasledujúcich tematických oblastí:

1. Základné geometrické útvary a ich vlastnosti. Znázorňovanie geometrických útvarov.
2. Binárne relácie a operácie v geometrii.
3. Miera geometrických útvarov.
4. Geometria ako veda a jej miesto v školskej matematike.

Elektronický kurz v LMS Moodle je rozdelený do tematických okruhov. Po úvodnom prihlásení sa do kurzu má študent k dispozícii informačný list (obsahuje všetky potrebné informácie pre úspešné absolvovanie predmetu), diskusné fórum (nástroj slúžiaci na

Príspevok vznikol v rámci grantového projektu – KEGA 163-009PU-4/2010 *Implementácia Learning Management Systém do matematickej a odborovodidaktickej prípravy budúcich učiteľov preelementaristov a elementaristov.*

odbornú diskusiu k predmetu), blok obsahujúci potrebnú pedagogickú dokumentáciu súvisiacu s vyučovaním geometrie na primárnom stupni vzdelávania a blok ponúkajúci voľne dostupné nástroje dynamickej geometrie.

Všetky témy spracované v elektronickom kurze majú nasledovnú štruktúru:

- Teoretické východiská – pdf dokument, ktorý obsahuje spracovanie vybraných elementov z odbornej geometrie.
- Doplnkové študijné materiály – ďalšie zdroje slúžiace na štúdium predmetnej problematiky. Obsahujú odkazy na už vytvorené materiály dostupné prostredníctvom internetu, videá a iné materiály spracované tútormi kurzu.
- Cvičenia – dokument obsahujúci zadania úloh odporúčaných na samostatnú prácu.
- Didaktická interpretácia – pdf dokument, v ktorom je spracovaná interpretácia teoretických východísk (elementy z odbornej geometrie) do problematiky matematického vzdelávania na primárnom stupni.
- Cvičný test – nástroj systému Moodle, ktorý umožňuje vytvorenie didaktického testu zameraného na autoevalváciu štúdia. Umožňuje vytvorenie spätnej väzby o úrovni zvládnutia danej problematiky prostredníctvom elektronického autokorektívneho on-line testu.

Tematická oblasť *Základné geometrické útvary a ich vlastnosti* je v elektronickom kurze rozčlenená do týchto tematických okruhov:

- Axiomatická výstavba geometrie. Základné a odvodené pojmy euklidovskej geometrie.
- Trojuholník, štvoruholník, mnohouholník
- Kružnica a kruh
- Telesá a ich siete
- Množiny bodov daných vlastností

Tematická oblasť *Binárne relácie a operácie v geometrii* je v elektronickom kurze rozčlenená nasledovne:

- Vzájomné polohy bodov, priamok a rovín v priestore
- Geometrické zobrazenia

Tematická oblasť *Miera geometrických útvarov* má v elektronickom kurze tieto okruhy:

- Miera úsečky. Miera uhla
- Miera rovinného útvaru

Tematický oblasť *Geometria a jej miesto v školskej matematike* je v elektronickom kurze inkorporovaná do každej lekcie najmä prostredníctvom odkazu Didaktická interpretácia.

V nasledujúcej časti uvádzame ukážky spracovania jednotlivých elementov z geometrie v elektronickom kurze s popisom ich obsahovej náplne.

V tejto lekcii je spracovaná problematika venovaná základným pojmom (bod, priamka, rovina) a odvodeným pojmom (úsečka, polpriamka, lomená čiara, konvexná a nekonvexná množina, polrovina, uhol). Problematike axiomatickej výstavby geometrie sa venujú odkazy Axiomatika geometrie, Neeuklidovská geometria – sférická, Neeuklidovská geometria – eliptická.

Didaktická interpretácia obsahuje zavedenie pojmov rovná a krivá čiara, otvorená a uzavretá lomená čiara, bod, priamka, polpriamka, úsečka vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ. Prezentovaná je aj metodika zavedenia pojmov bod, úsečka, stred úsečky, polpriamka, priamka a typy úloh v jednotlivých ročníkoch.

Druhá lekcia je venovaná axióme rovnobežnosti; reláciám incidencie, inklúzie, rovnobežnosti; vzájomným polohám geometrických útvarov v priestore (bod – bod, bod – priamka, bod – rovina, priamka – priamka, priamka – rovina, rovina – rovina); kritériu rovnobežnosti priamky a roviny, kritériu rovnobežnosti dvoch rovín; relácii kolmosti (pravý uhol, kolmé priamky, kolmosť priamky a roviny, kritérium kolmosti priamky a roviny, kritérium kolmosti dvoch rovín).

Didaktická interpretácia zahŕňa problematiku vzájomnej polohy geometrických útvarov (bod, priamka, úsečka) v rovine vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ; kolmosť priamok vo vyučovaní matematiky; metodiku rysovania kolmých priamok; rysovanie pravouhlých štvoruholníkov s využitím kolmosti (podľa ŠVP ISCED1 táto problematika nemusí byť zaradená na 1. stupeň ZŠ).

Teoretická časť tretej lekcie sa venuje vymedzeniu pojmov trojuholník, štvoruholník, mnohouholník, ich vlastnostiam a klasifikácii.

Didaktická rovina obsahuje propedeutiku pojmu trojuholník vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ; metodiku zavedenia pojmu trojuholník, vlastnosti a metodiku rysovania trojuholníka. Spracovaná je aj propedeutika pojmov štvorec, obdĺžnik a mnohouholník vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ; metodika zavedenia pojmov štvorec a obdĺžnik; ich vlastnosti a metodika rysovania.

V lekcii Kružnica a kruh sú teoretické východiská venované definícii pojmov kružnica a kruh; zhodnosti kružníc (kruhov); sústredným kružniciam; častiam kružnice a kruhu (kružnicový oblúk, kruhový výsek, kruhový odsek); vzájomnej polohe priamky a kružnice (nesečnica, dotyčnica, sečnica, tetiva) a vzájomnej polohe dvoch kružníc.

Didaktická interpretácia zahŕňa propedeutiku pojmov kružnica a kruh vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ; metodiku zavedenia pojmov kružnica a kruh, ich vlastnosti a metodiku rysovania.

Táto téma obsahuje spracovanie nasledovných elementov: guľová plocha, guľa, polpriestor, vrstva, hranolový priestor, hranol (vlastnosti hranola, typy hranolov), ihlanový priestor, ihlan (vlastnosti ihlana, typy ihlanov), valcový priestor, valec (vlastnosti valca), kužeľový priestor, kužeľ (vlastnosti kužeľa), sieť telesa, siete jednotlivých telies.

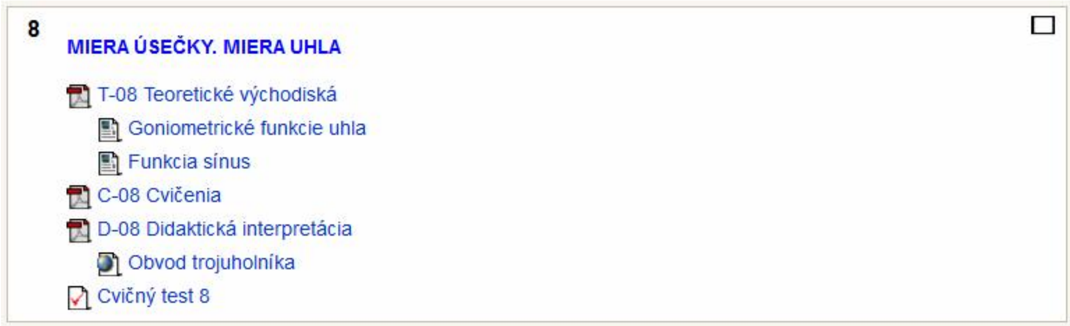
Didaktická interpretácia pozostáva z oblastí: priestorové útvary vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ; kocka – model, sieť kocky, stavby z kociek.

V tejto časti je vymedzený pojem množina bodov daných vlastností a definované geometrické útvary ako množiny bodov daných vlastností (úsečka, polpriamka, polrovina, trojuholník, kružnica, kruh, polpriestor, guľová plocha, guľa, os úsečky, os uhla, osi rôznobežiek, os pása rovnobežiek, množina všetkých bodov roviny v danej vzdialenosti od priamky, Talesova kružnica).

Didaktická interpretácia je zameraná na geometrické útvary, ktoré je možné definovať ako množiny bodov daných vlastností – úsečka, polpriamka, trojuholník, kružnica, kruh, guľa – s poukázaním na ich odlišné zavedenie vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ; na základné vlastnosti a rysovanie daných rovinných geometrických útvarov.

Lekcia je venovaná zhodnosti úsečiek (relácia zhodnosti úsečiek, prenášanie úsečiek, porovnávanie úsečiek, grafický súčet úsečiek, grafický rozdiel úsečiek, násobok úsečky); zhodnosti uhlov a trojuholníkov (vety o zhodnosti trojuholníkov); základným vlastnostiam geometrického zobrazenia (samodružný bod, inverzné zobrazenie, involutórne zobrazenie); zhodnému zobrazeniu (definícia, zhodnosť geometrických útvarov); zhodným zobrazeniam v rovine (osová súmernosť, stredová súmernosť, otočenie, posunutie); podobným zobrazeniam v rovine a podobnosti trojuholníkov.

V didaktickej interpretácii je pozornosť venovaná metodike, ako sa vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ určuje, že dva geometrické útvary sú zhodné; propedeutike grafického súčtu, rozdielu úsečiek a násobku úsečky; propedeutike zhodných a podobných zobrazení v rovine.

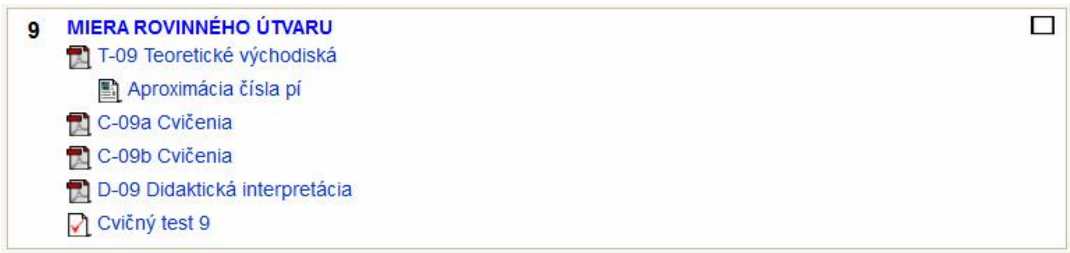


V dokumente teoretické východiská je spracovaná problematika:

- Miera úsečky – definícia
  - vlastnosti miery úsečky
  - jednotková úsečka
  - jednotky dĺžky – základná jednotka, odvodené jednotky
- Trojuholníková nerovnosť
- Vzdialenosť geometrických útvarov
  - dvoch bodov
  - bodu a geometrického útvaru
  - dvoch geometrických útvarov
- Obvod geometrických útvarov

Didaktická interpretácia tejto problematiky ma nasledujúcu štruktúru:

- Metodika zavedenia dĺžky úsečky.
- Jednotky dĺžky a ich postupné zavádzanie v matematike na 1. stupni ZŠ.
- Premieňanie jednotiek dĺžky.
- Propedeutika pojmu obvod.
- Metodika zavedenia pojmu obvod rovinného útvaru (trojuholník, štvorec, obdĺžnik, mnohouholník).



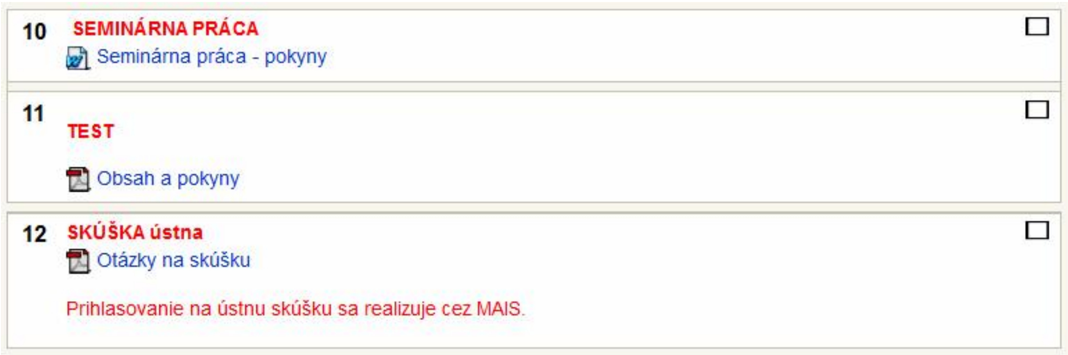
V ďalšej lekcii sú teoretické východiská zamerané na tieto elementy:

- Merateľný útvar v rovine
- Miera rovinného útvaru – definícia
  - vlastnosti miery rovinného útvaru
  - jednotkový útvar
  - jednotky obsahu
- Jordanova teória miery
- Obsah rovinných útvarov

Ich didaktická interpretácia obsahuje túto problematiku:

- Propedeutika pojmu obsah rovinného útvaru vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ.
- Metodika zavedenia pojmu obsah rovinného útvaru - štvorec, obdĺžnik, mnohouholník, trojuholník.

Posledné časti kurzu sú venované problematike seminárnej práce (zadanie seminárnej práce, pokyny na jej vypracovanie a odovzdanie, šablóna dokumentu), testu (súčasť priebežného hodnotenia, ktorá prebieha prezenčne – dokument obsahuje obsahové zameranie testu a pokyny) a ostatný dokument obsahuje formuláciu otázok k ústnej časti skúšky (záverečné hodnotenie z predmetu).



3 Záver

Na základe našich skúsenosti ([1], [2], [7]) aj skúseností kolegov ([3], [4], [5], [6], [8]) sa ukazuje, že prezenčná forma štúdia doplnená elektronickým kurzom spracovaným napr. v prostredí LMS Moodle, je vhodnou kombináciou pre efektívnu prípravu budúcich učiteľov pre primárne vzdelávanie aj v oblasti elementárnej geometrie.

LITERATÚRA

[1] MOKRIŠ, M. Electronic textbook in LMS Moodle. In: *Mathematics XII.* Czestochowa: Publishing House of Jan Dlugosz University of Czestochowa, 2007. s. 289-294. ISBN 978-83-7455-013-0. - ISSN 1896-0286

[2] MOKRIŠ, M. – SCHOLTZOVÁ, I. Elektronická podpora matematického vzdelávania na Pedagogickej fakulte PU v Prešove. In: *Zkušenosti s dalším vzděláváním učitelů v matematice.* Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, Pedagogická fakulta, 2008. s. 85-94. ISBN 978-80-7368-621-5

[3] PRÍDAVKOVÁ, A. Elektronický kurz v matematickej príprave budúcich učiteľov primárnej školy. In 7. Žilinská didaktická konferencia. (CD nosič). Žilina: FPV ŽU v Žiline, 2010, ISBN 978-80-554-0216-1

[4] PRÍDAVKOVÁ, A. Elementárne pojmy teórie množín v príprave učiteľov primárnej školy. In: *Tvořivost v počátečním vyučování matematiky.* Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011. s. 185 – 189. ISBN 978-80-7043-992-0

[5] PRÍDAVKOVÁ, A. MODELS OF THE NOTION OF A FUNCTION IN PRIMARY SCHOOL. In *International Conference PRESENTATION of*

MATHEMATICS '11. Liberec: Technical University of Liberec, 2011. s. 243 - 248. ISBN 978-80-7372-773-4

[6] PRÍDAVKOVÁ, A. Experience with teaching course of "fun mathematics". In: *Mathematics XII*. - Czestochowa: Publishing House of Jan Dlugosz University of Czestochowa, 2007. P 355-358. ISBN 978-83-7455-013-0. - ISSN 1896-0286

[7] SCHOLTZOVÁ, I. – MOKRIŠ, M. Geometry in elementary teacher training. In: *Usta ad Albim Bohemica* [elektronický zdroj]. - ISSN 1802-828X. - Roč. 10, č. 1 (2010), s. 85-90.

[8] TOMKOVÁ, B. Elektronický kurz „ Tvorba počiatočných matematických predstáv". In: *Tvořivost v počátečním vyučování matematiky*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011. s. 224 – 227. ISBN 978-80-7043-992-0

doc. RNDr. Iveta Scholtzová, PhD.
Mgr. Marek Mokriš, PhD.
Katedra matematickej edukácie
Pedagogická fakulta
Prešovská univerzita v Prešove
Ul. 17. novembra 15
SK – 080 01 Prešov
e-mail: iveta.scholtzova@pf.unipo.sk
e-mail: marek.mokris@pf.unipo.sk

NIEKOĽKO ÚLOH O ŠTVORSTENE NA ROZVOJ PRIESTOROVEJ PREDSTAVIVOSTI

LUCIA RUMANOVÁ, DANIEL HNYK

ABSTRACT. In the article we will look to the spatial imagination, the tetrahedron and its properties. We give several types of tasks which are the suitable for "training" spatial vision. In the last part of the contribution we will address the use of teaching aids and educational software which can help to improve the teaching of solid geometry.

O priestorovej predstavivosti

Priestorovou predstavivosťou rozumieme schopnosť predstavovať si vlastnosti geometrických trojrozmerných predmetov, ich tvar (podoba telies), polohu, veľkosť a umiestnenie v priestore.

Najnižšou formou priestorovej predstavivosti je *priestorová predstavivosť všeobecná* alebo *intuitívna priestorová predstavivosť*. Rozumie sa tým schopnosť predstavovať si:

- skôr videné (vnímané) objekty v trojrozmernom priestore a vybaviť si ich vlastnosti, polohu a priestorové vzťahy,
- skôr alebo v danom momente videné (vnímané) objekty v inej vzájomnej polohe, než v akej boli v skutočnosti vnímané,
- objekty v priestore na základe ich rovinného obrazu,
- neexistujúci reálny objekt v trojrozmernom priestore na základe jeho slovného opisu.

Vyššia forma je *geometrická predstavivosť*, teda schopnosť:

- abstrahovať z reálnej skutočnosti (z konkrétnych objektov) ich geometrické vlastnosti a vidieť v nich modely geometrických útvarov v ich „čistej podobe",
- predstavovať si geometrické útvary a vzťahy medzi nimi na základe ich jednoduchých modelov. Predstavovať si geometrické útvary v najrôznejších vzájomných vzťahoch (napr. prienik dvoch telies)
- mať zásobu predstáv geometrických útvarov a schopnosť vybavovať si ich najrôznejšie podoby a polohy.

Najvyššou formou priestorovej predstavivosti je *priestorové a geometrické (priestorové schematické) myslenie*. Priestorové myslenie je schopnosť na základe priestorových a geometrických predstáv:

- vyvodiť závery, prípadne vytvoriť si nové predstavy, vedieť takéto nové predstavy vyjadriť alebo ich aj realizovať,
- myšlienkovo konštruovať priestorové obrazy (geometrické útvary), robiť s nimi operácie a vedieť také operácie vyjadriť, prípadne ich realizovať,
- vyjadriť graficky, diagramom, grafom alebo iným spôsobom (nejakou geometrickou schémou) v realite existujúce vzťahy a závislosti, vlastnosti rôznych matematických objektov, pojmov a javov a vzťahy závislosti medzi nimi, prípadne vedieť vyjadriť prebiehajúci dej,
- vedieť si predstaviť rôzne vzťahy, javy a závislosti existujúce v realite i v matematike, ak sú vyjadrené geometrickou schémou,
- využívať grafické metódy na riešenie praktických úloh a matematických problémov. [1]

Štvorsten

Štvorsten je jedno z Platónovskych telies, ktorého najdôležitejšie vlastnosti sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

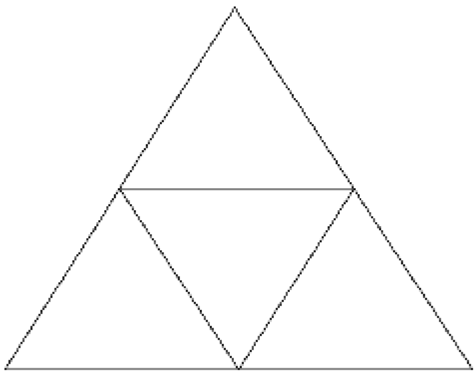
názov	**Počet stien**	**Počet hrán**	**Počet vrcholov**	**Typ steny**	**Počet hrán pri vrchole**	**Povrch (*a* – dĺžka hrany)**	**Objem (*a* – dĺžka hrany)**
Štvorsten tetraéder	4	6	4	trojuholník	3	$\sqrt{3}a^2 j^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 j^3$

Tabuľka 1: vlastnosti štvorstena

Nasledujúca veta popisuje vlastnosť štvorstena o hranových uhloch, ktorú možno využiť hlavne pri hľadaní jeho sietí: *Súčet ľubovoľných dvoch hranových uhlov prislúchajúcich ľubovoľnému vrcholu každého štvorstena je väčší ako tretí hranový uhol s tým istým vrcholom.*
Podrobnejšie vlastnosti štvorstenov môže čitateľ nájsť v publikácii [2].

Úlohy o štvorstene

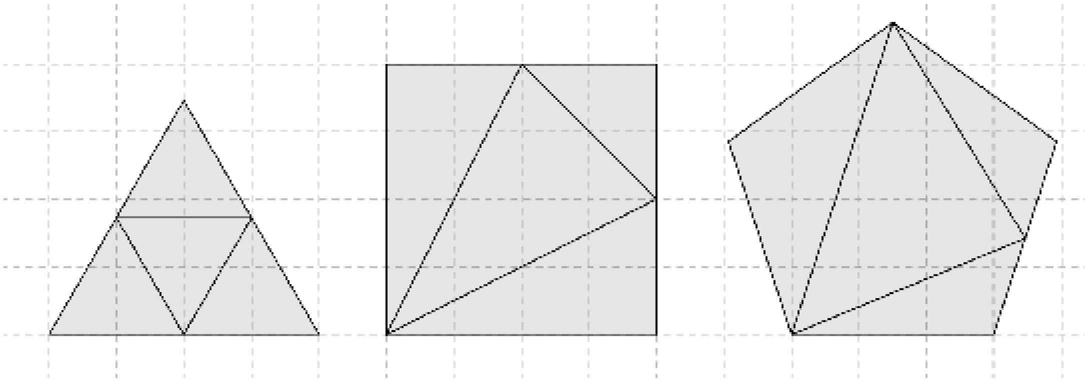
Študenti základných i stredných škôl majú problémy pri riešení stereometrických úloh. Jednou z príčin môže byť aj slabšia úroveň priestorovej geometrickej predstavivosti. Úlohy v tejto časti sú venované štvorstenu, pričom sú zároveň ukážkami ako uvedený problém čiastočne eliminovať a študentov tiež motivovať. Uvedieme niekoľko typových úloh, prípadne námetov vhodných k rozvoju priestorovej predstavivosti.
Príklad 1: *Doplňte záložky na sieti štvorstena a vyrobte jeho model z papiera.*



Obrázok 1: sieť štvorstena

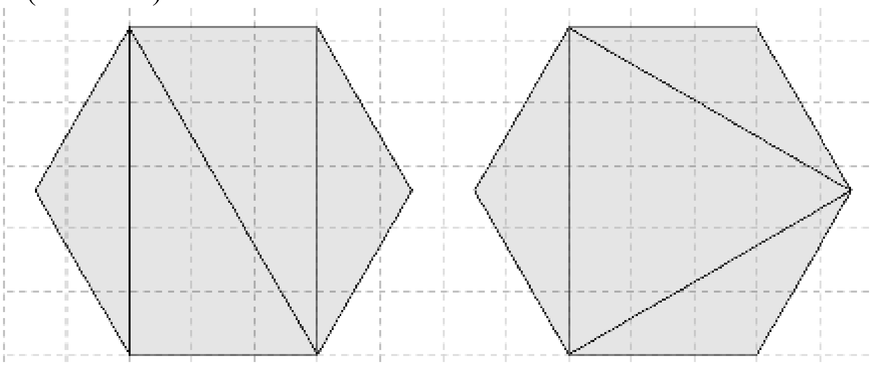
Príklad 2: *Aký pravidelný n-uholník* $(n \in N)$ *môže vzniknúť zo sieti existujúceho štvorstena?*
Riešenie: Sieť ľubovoľného štvorstena je vo všeobecnosti konvexný alebo nekonvexný šesťuholník (štvorsten má 9 hrán, z ktorých 3 hrany ležia vo vnútri šesťuholníka) . Pri rozložení štvorstena do roviny môžu niektoré hrany so spoločným vrcholom aj splynúť, preto sa jeho sieť zredukovať aj na rovnostranný trojuholník, štvorec alebo pravidelný

päťuholník (obrázok 2). S vvyužitím vlastnosti štvorstena o hranových uhloch vieme ukázať, že uvedené pravidelné mnohouholníky tvoria sieť a teda štvorsten s takou sieťou existuje.



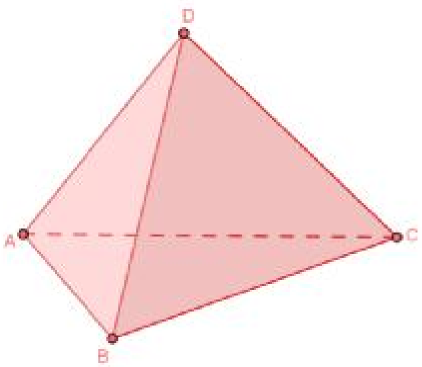
Obrázok 2: pravidelné n-uholníky ako siete štvorstena

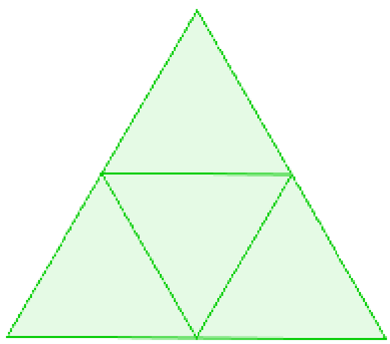
Pre pravidelný šesťuholník uvedená vlastnosť nie je splnená, preto nemôže byť sieťou štvorstena (obrázok 3).

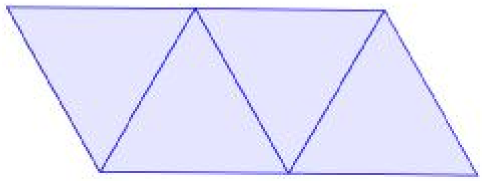


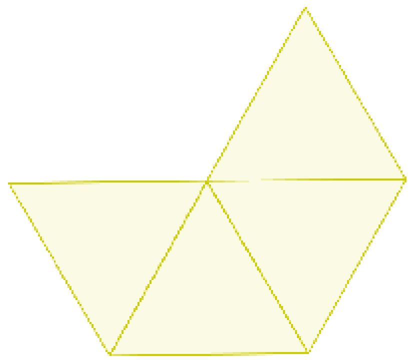
Obrázok 3: pravidelné šesťuholníky, ktoré nie sú sieťami štvorstena

<u>Príklad 3:</u> *Sú nasledujúce siete sieťami daného štvorstena ABCD? Ak daný útvar tvorí sieť štvorstena ABCD, tak označte jeho vrcholy.*





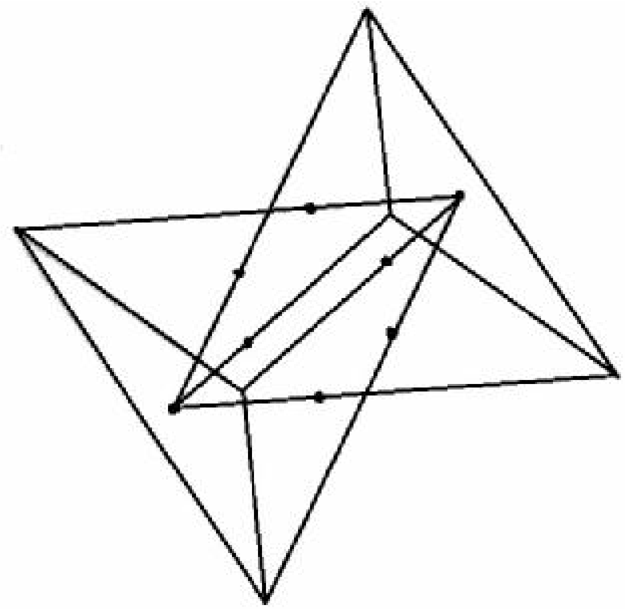




<u>Návod na riešenie</u>: Každý vrchol štvorstena je spoločným bodom troch jeho stien a troch hrán.

<u>Príklad 4:</u> *Pravidelný štvorsten je zobrazený v stredovej súmernosti so stredom v bode, ktorý leží v strede ľubovoľnej výšky tohto štvorstena (obrázok 4). Nakreslite podľa viditeľnosti:*

a) zjednotenie týchto dvoch telies
b) prienik týchto dvoch telies
c) to, čo zostane bez prieniku z jedného štvorstena
d) to, čo zostane bez prieniku z druhého štvorstena.



Obrázok 4: pravidelný štvorsten v stredovej súmernosti

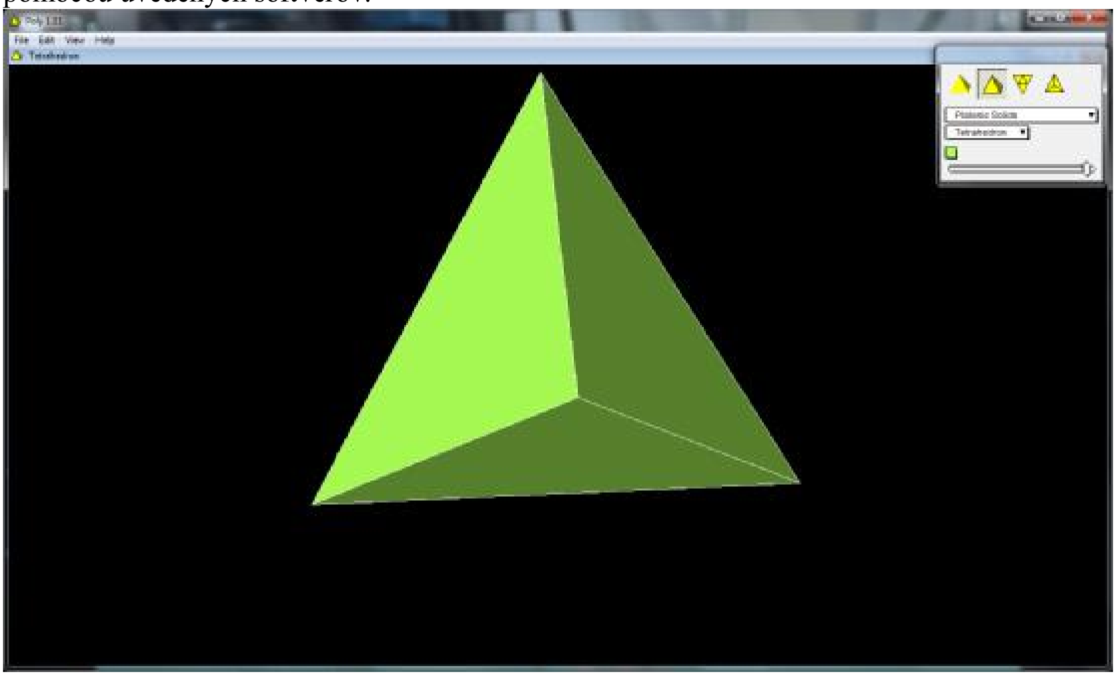
Didaktické pomôcky a didaktický softvér

Nové trendy vo vyučovaní geometrie vedú k využívaniu rôznych didaktických pomôcok, didaktických softvérov na zlepšenie, ale tiež aj na zatraktívnenie jej výučby.

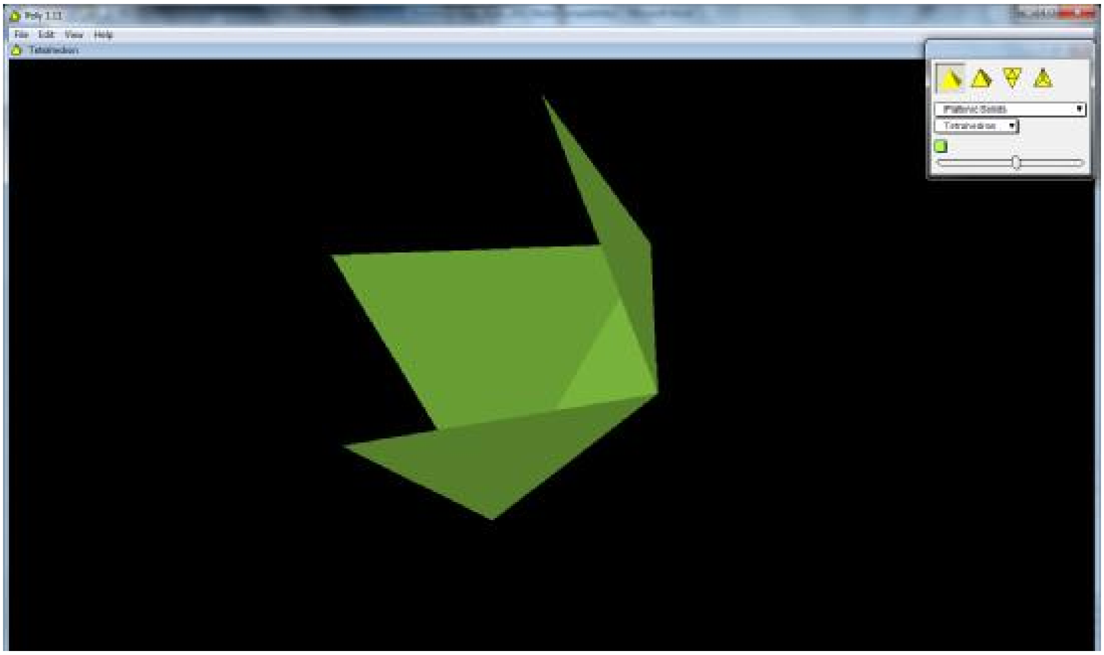
V školskej praxi k vytváraniu modelov geometrických telies sú osvedčené stavebnice GEOMAG a POLYDRON. Nasledujúce obrázky (obrázok 5) sú vytvorené pomocou uvedených didaktických pomôcok.

Obrázok 5: pravidelný štvorsten pomocou GEOMAGu a POLYDRONu

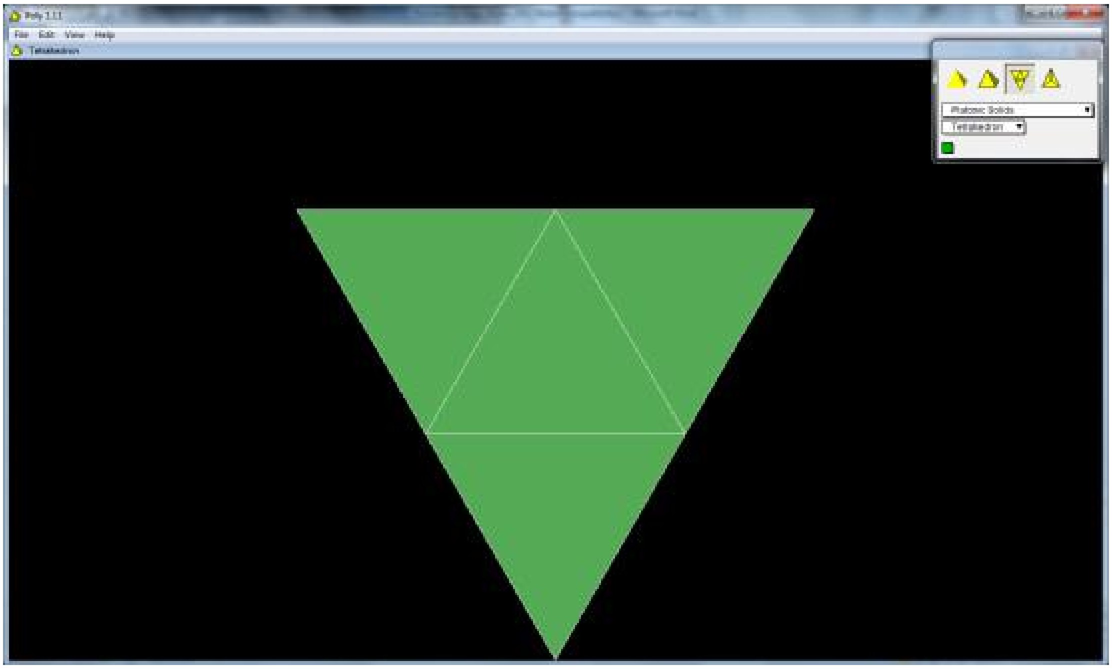
V prípade nedostupnosti didaktických pomôcok a modelov je možné tento problém nahradiť dynamickými softvérmi. Softvéry vnášajú do výučby geometrie pohyb – dynamickosť, realistické obrazy priestorových objektov – virtuálnu realitu a možnosť priameho zasahovania a zmeny parametrov – interaktívnosť. Za všetky spomenieme napríklad CABRI 3D, POLY. Nasledujúce obrázky (obrázok 6, 7, 8, 9, 10) sú vytvorené pomocou uvedených softvérov.



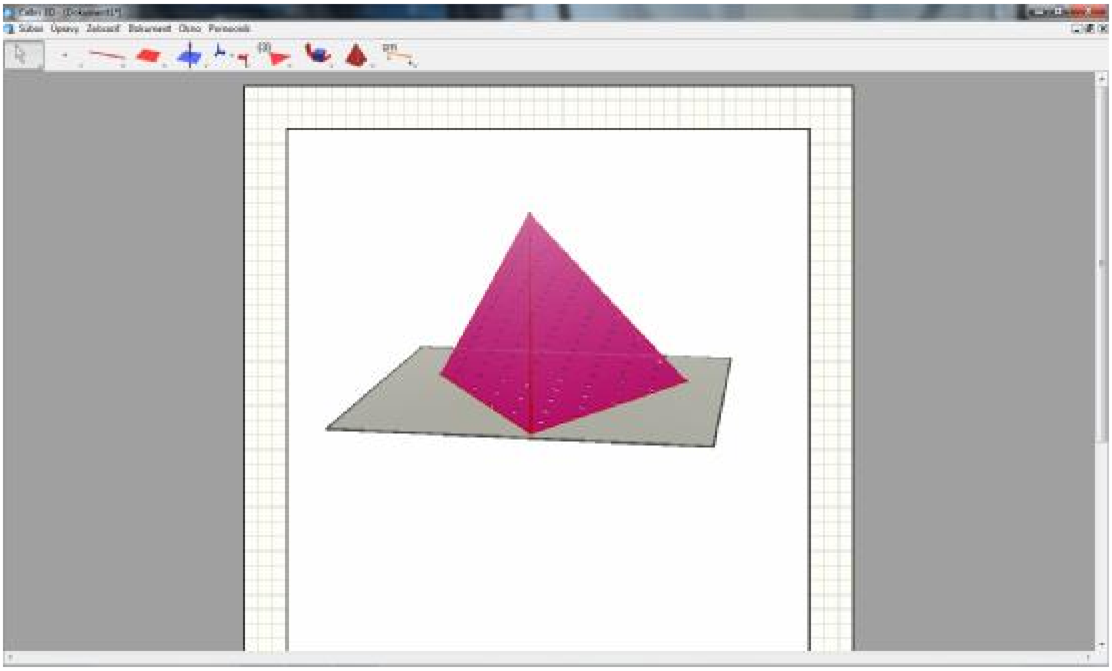
Obrázok 6: pravidelný štvorsten s využitím softvéru POLY



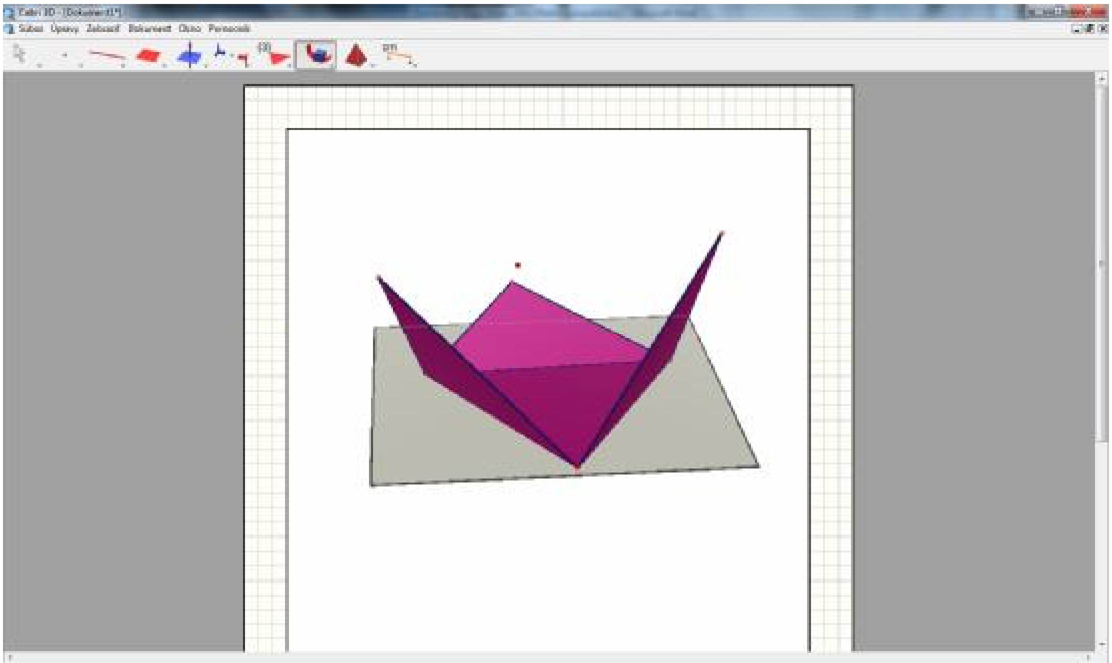
Obrázok 7: zostrojenie sieti pravidelného štvorstena s využitím softvéru POLY



Obrázok 8: sieť pravidelného štvorstena s využitím softvéru POLY



Obrázok 9: pravidelný štvorsten s využitím softvéru CABRI 3D



Obrázok 10: zostrojenie sieti pravidelného štvorstena s využitím softvéru CABRI 3D

Záver

V príspevku sme sa venovali priestorovej predstavivosti, štvorstenu a jeho vlastnostiam. Uviedli sme niekoľko typových úloh, ktoré sú vhodné na „tréning“

priestorového videnia. Posledná časť príspevku bola venovaná využívaniu didaktických pomôcok a didaktických softvérov, ktoré môžu napomôcť k zlepšenie výučby stereometrie.

LITERATÚRA

[1] Šedivý, O. – Rumanovská, H: *Niekoľko metodických poznámok k rozvoju priestorovej predstavivosti*, Zborník PF v Nitre č. 4, Nitra, 1988

[2] Vallo, D. – Šedivý, O.: *Mnohosteny. Cesta k rozvoju geometrických predstáv*, FPV UKF v Nitre, Nitra, Prírodovedec č. 418, 2010, ISBN 978-80-8094-735-4

[3] Pavlovičová, G. – Rumanová, L.: *Štvorsten – jeho vlastnosti, aplikácie*, Acta mathematica 12, UKF v Nitre, Nitra, 2009, ISBN 978-80-8094-614-2

PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: lrumanova@ukf.sk

Mgr. Daniel Hnyk
Základná škola
Záhorácka ul. č.95
Malacky 901 01
e-mail: daniel.hnyk@gmail.com

STEREOMETRIA V PRÍPRAVE BUDÚCICH UČITEĽOV MATEMATIKY

MICHAELA REGECOVÁ, MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

ABSTRACT. We present some activities from 3D geometry in this paper. All the activities were implementing into courses for students to be a teacher. On the lessons we use mostly software GeoGebra. Some activities are also very well demonstrating using a modeling mass or other "touchable" model.

Úvod

Spôsob prípravy budúcich učiteľov matematiky sa na každej vysokej škole viac či menej líši, hlavná myšlienka daných študijných programov je však spoločná, a to pripraviť študenta na učiteľskú dráhu ako po odbornej, tak po didaktickej stránke. Na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave je v študijnom pláne odboru Učiteľstvo akademických predmetov v študijnom programe Matematika zaradený predmet Didaktický seminár zo školskej matematiky (DSZŠM), v ktorom je našou snahou rozvíjanie ako odborných predmetových kompetencií študentov, tak i ich pedagogických kompetencií. Venujeme sa tu najmä úlohám zo základoškolskej a stredoškolskej matematiky s dôrazom na matematicky korektné riešenie(a) úlohy a ich analýzu z didaktického hľadiska (rôzne spôsoby riešenia úlohy, dôraz na možné chyby a problémy žiakov...). Vzhľadom na to, že predmet DSZŠM je zostavený v súlade s aktuálnymi Štátnymi vzdelávacími programami (teda po obsahovej stránke je zameraný na učivo základných a stredných škôl), jednou z tém, ktorým sa v rámci tohto predmetu venujeme, je i stereometria.

Problematike výučby stereometrie či už syntetickej, alebo analytickej sa venuje viacero prác. Napríklad Regecová sa v [1] venuje možnosti zefektívnenia vyučovania analytickej geometrie na stredných školách využitím nových metód, ako i využitím netradičných úloh. Dôraz na stereometriu kladie vo svojej práci Rumanová [2], ktorá do hĺbky analyzuje riešenie stereometrickej úlohy a úspešnosť jednotlivých stratégií riešenia. Vallo et al. [3] predstavujú niekoľko myšlienok integrácie aktivít zameraných na manipuláciu s modelmi štvorstena vo vyučovaní. Pémová vo svojej dizertačnej práci píše [4]: *„Teoretickým zázemím zobrazovania objektov vo voľnom rovnobežnom premietaní je tzv. veta Pohlkeho-Schwarzova... Oboznámenie sa vyučujúceho aspoň s jej základmi môže prispieť k zefektívneniu jeho práce v procese vyučovania...“* Vo svojej práci ďalej odsudzuje spôsob výučby stereometrie na stredných školách a ponúka niekoľko postupov, ako sa vyhnúť neželanému stereotypu – práca s rovnobežnostenmi, hranolmi, ihlanmi a riešenie metrických úloh nie hneď od začiatku na referenčnom modeli. Ako píše vo svojej práci Kohanová [5], vhodným spôsobom (nielen na predmete DSZŠM) sa osvedčila metóda *„problem solving“*. O potrebe inovácie prípravy budúcich učiteľov matematiky píše aj Vankúš v [6], ktorý sa snaží zaviesť do výučby nové postupy a metódy.

Aj napriek snahe viacerých učiteľov sa výučba stereometrie akoby zúžila na rezy kocky danou rovinou. Túto domnienku potvrdzujú reakcie študentov, ktorí si pod témou stereometria predstavujú predovšetkým *„to, kde robíme rezy kocky“*. V nasledujúcom texte sa pokúsime opísať aktivity, ktoré so študentmi učiteľstva matematiky praktizujeme na DSZŠM pri preberaní stereometrie a jej príbuzných tém.

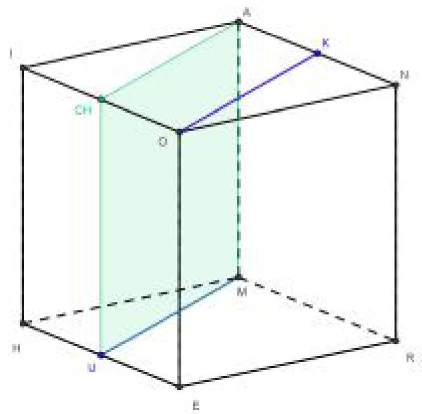
Článok vznikol vrámci projektu KEGA č. 001UJS-4/2011 s názvom *Podpora výučby matematiky pomocou voľne dostupných matematických softvérov*.

Voľné rovnobežné premietanie (VRP)

S pojmom VRP sa stretne len niekoľko študentov počas stredoškolského štúdia aj napriek tomu, že ho priamo používajú, aplikujú. Preto sme do predmetu DSZŠM zvlášť zaradili i celok s týmto názvom, aby sa študenti oboznámili, resp. si zopakovali čo to VRP vlastne je, aké vlastnosti sa vo VRP zachovávajú a aké je ich využitie. Úlohy sú zamerané na priraďovanie štvor- a päťuholníkov k obrazom štvorca a pravidelného päťuholníka v danom VRP, na zdôvodnenie rovnobežnosti dvoch rovín, prípadne dvoch priamok v priestore. Samotné zobrazovanie objektov z jednej roviny do druhej pomocou daného smeru a obrazu jedného bodu na to nadväzujú. Celok končí rôznymi pohľadmi na trojrozmerné telesá, ich modely v rovine, čím by sme chceli zamedziť spôsobu zobrazovania kocky výlučne v pravom nadhľade. Program GeoGebra je v tomto prípade veľkou pomôckou, prostredníctvom ktorej demonštrujeme, že niektoré pohľady na kocku (rôzne pravé a ľavé podhľady a nadhľady) nám môžu odhaliť niektoré dôležité zákonitosti.

Príklad 1: Body U, K sú po poradí stredy hrán HE a NA kocky HERMIONA. Zdôvodnite, že úsečka UM je rovnobežná s úsečkou OK.

Prístup k riešeniu: Využijeme softvér GeoGebra, ktorý nám umožní najskôr vizuálne sa presvedčiť o rovnobežnosti a následne hľadať argumenty, prečo dané priamky sú rovnobežné (obr.1). Táto úloha je zameraná na zlepšenie argumentácie študentov učiteľstva. Ich argumentácia slovami „veď to vidím“ nie je postačujúca. Možno povedať, že z hľadiska Kuzniakových úrovní geometrického myslenia [7] sú na prvej úrovni – teda „Natural Geometry“ (spôsob argumentácie je pevne spojený s realitou, resp. skúsenosťou).

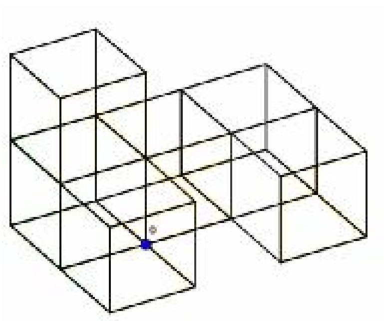


obr. 1: argumentácia rovnobežnosti dvoch priamok

Kockové telesá

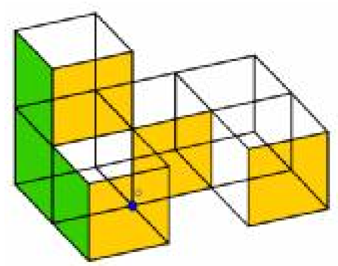
Kockové teleso je také teleso, ktoré vznikne zlepením niekoľkých kociek s rovnakou dĺžkou hrany, pričom je možné navzájom zliepať kocky len celou stenou. Aktivity, s ktorými sa študenti stretnú v rámci predmetu DSZŠM sú zamerané na rozvoj priestorovej predstavivosti a študenti ich môžu priamo využiť i vo svojej budúcej praxi v roli učiteľa na základnej, resp. strednej škole.

Príklad 2: Určte pôdorys, bokorys a nárys kockového telesa znázorneného na obr. 2:

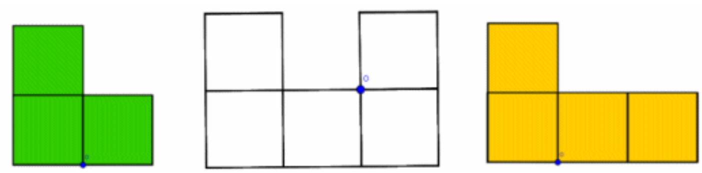


obr. 2: kockové teleso

Prístup k riešeniu: Táto úloha je náročná na priestorovú predstavivosť študentov, keďže teleso je poskladané z viacerých kociek umiestnených v niekoľkých „vrstvách“. Pri riešení je vhodné vizuálne (napr. farebne) najprv odlíšiť jednotlivé steny kociek, ktoré vidíme spredu, zboku a zhora na kompletnom telese. V tomto prípade môžu študenti opäť využiť softvér GeoGebra, v ktorom jednotlivé steny vyfarbia (obr. 3). Výsledný bokorys, pôdorys a nárys vidíme na obr.3. Úlohu je samozrejme možné riešiť i pomocou modelov kociek, z ktorých študenti vytvoria kockové teleso a následnou manipuláciou s ním určia bokorys, pôdorys a nárys telesa.

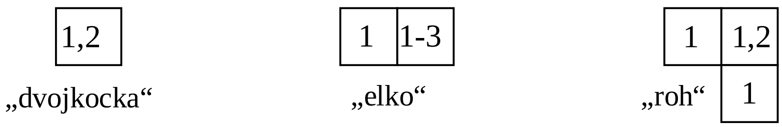


obr. 3: určovanie pôdorysu, bokorysu a nárysu kockového telesa

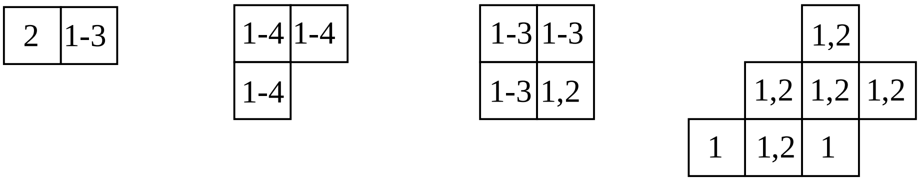


obr. 4: bokorys, pôdorys a nárys kockového telesa

Príklad 3: Máme k dispozícii zakódované kockové telesá znázornené na obr. 5, a to z každého po dva kusy. Ktoré z telies na obr. 6 sa dajú postaviť z uvedených dielov na obr.5? (Netreba použiť všetky.)



obr. 5: kockové telesá



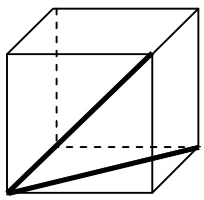
obr. 6: kockové telesá

Prístup k riešeniu: Pre riešenie tejto úlohy je dôležité, aby študenti odhalili spôsob kódovania kockových telies, na základe ktorého môžu následne zostaviť žiadané kockové telesá. Ak majú študenti problém s predstavením si jednotlivých telies, je v tomto prípade vhodné použiť plastelínu. Tá má okrem silnej funkcie názornosti i výhodu priamej manipulácie s objektmi, čo zvyšuje zaujatosť a motiváciu žiakov.

Stereometria

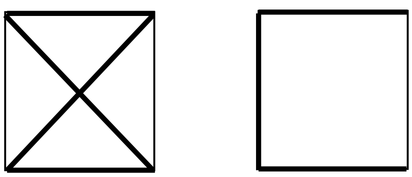
Celok s názvom Stereometria sme rozdelili na niekoľko častí a zaradili do viacerých semestrov štúdia v súlade so špirálovým osnovaním učiva daným Štátnym vzdelávacím programom z roku 2008. Postupne od kódovania zobrazených kockových telies prechádzame cez siete telies ku syntetickému a následne i analytickému riešeniu metrických úloh v kocke alebo ihlane.

Príklad 4: Silvia si znázornila kocku vo voľnom rovnobežnom premietaní. Na obrazy jej stien kreslila úsečky s krajnými bodmi vo vrcholoch kocky. Zatiaľ má dve (obr. 7).



obr. 7

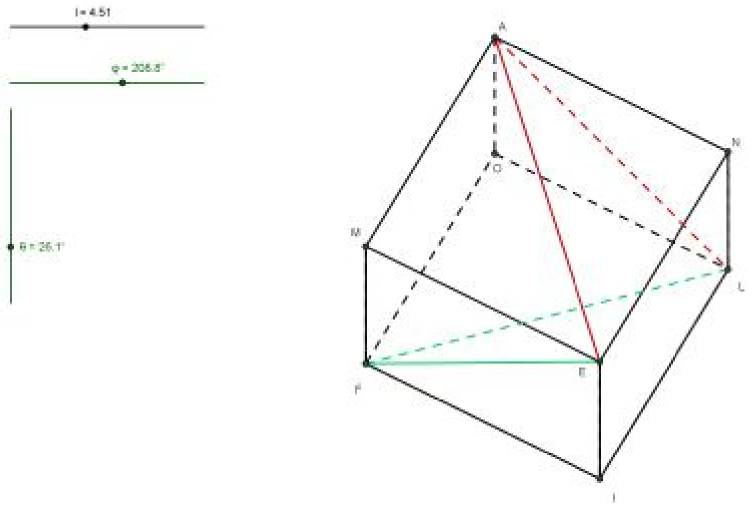
Do jej obrázka dokreslite čo najmenej (čo najviac) takýchto úsečiek tak, aby ste dostali nasledovné dva priemety výslednej čiary (obr.8):



pôdorys bokorys

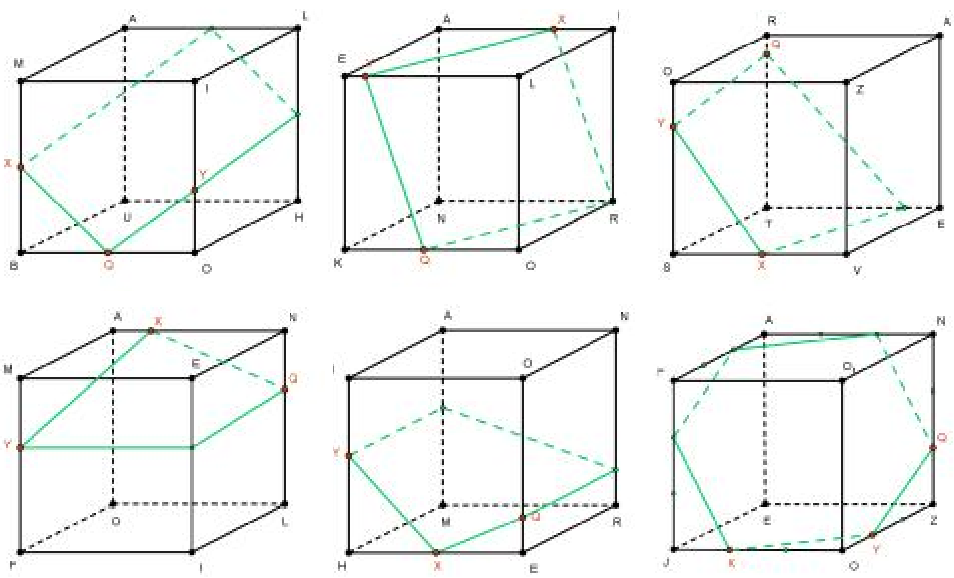
obr. 8

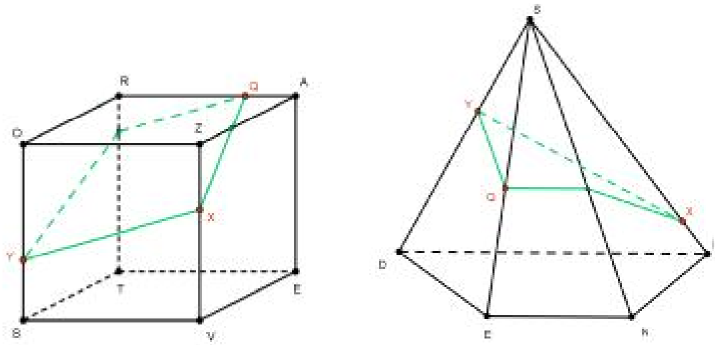
Prístup k riešeniu: Riešenie je možné demonštrovať na modeli kocky zostrojenom v programe GeoGebra, pričom je potrebné zadefinovať rotáciu vodorovnú aj zvislú, aby demonštrácia mala zmysel (obr. 9). Dokresľovaním úsečiek do stien kocky a následná rotácia nám umožní nájsť odpovede na obe otázky, teda koľko minimálne a koľko maximálne čiar treba dokresliť, aby sme videli daný pôdorys a bokorys. Toto prostredie je zároveň vhodné i na rozprúdenie diskusie o tom, či tieto dva pohľady sú postačujúce k jednoznačnosti riešenia, resp. či je postačujúce dodanie nárysu na to, aby už riešenie bolo jednoznačné. Vo verzii GeoGebra 3D (zatiaľ len „beta“ verzia, pozri [8]) je 3D prostredie východiskovým nastavením, práca v tejto najnovšie sa vyvíjajúcej verzii bude preto už onedlho vhodnejšia na demonštráciu úloh tohto typu.



obr. 9: jedno z riešení – zelené úsečky boli dané v zadaní úlohy, červené úsečky sú dokreslené

Príklad 5: Nájdite chybné rezy daných telies rovinou XYQ (obr. 10) a opravte ich.





obr. 10: hľadanie chybných rezov telies

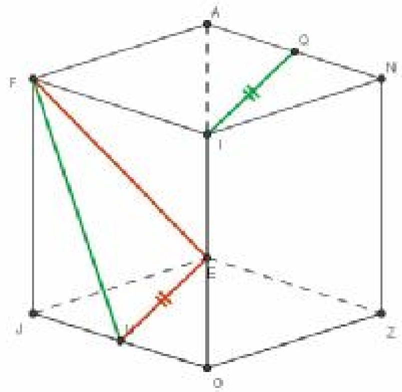
Prístup k riešeniu: Dôraz je na priestorovej predstavivosti, keď sa od študentov očakáva „videnie“ správneho/nesprávneho výsledného rezu danou rovinou, ako i na správnej argumentácii. Teda napr. prečo v jednej stene nemôžu byť dve rôzne úsečky rezu, prečo v niektorých telesách môžme použiť rovnobežnosť a pod.

Výpočtové úlohy zo stereometrie

Zamerali sme sa na určovanie vzdialenosti bodov, priamok a rovín v priestore, ako i na výpočet veľkostí uhlov dvoch objektov v priestore. Telesá sú pomenované netradične, takže (nielen) študent si musí urobiť náčrt, aby zistil, o aké roviny, priamky, prípadne vrcholy telesa ide.

Príklad 6: Určte veľkosť uhla priamok UF a IQ v kocke JOZEFINA, kde U je stred hrany OJ a Q je stred hrany NA.

Prístup k riešeniu: Opäť môžeme použiť program GeoGebra. Dôležitá vec, ktorú je potrebné si uvedomiť je to, ako určíme uhol mimobežiek. Následne je úloha a jej riešenie triviálne (obr. 11).

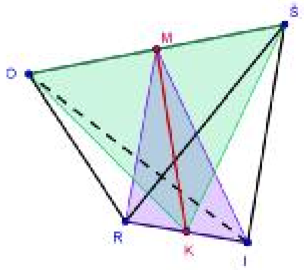


obr. 11: uhol mimobežiek UF a IQ

Príklad 7: Určte vzdialenosť protiľahlých hrán pravidelného štvorstena RIŠO s dĺžkou hrany $a = \sqrt{2}$.

Prístup k riešeniu: Podobne ako v predchádzajúcej úlohe, i v tomto prípade je potrebné, aby študenti vedeli, čo sa pod pojmom vzdialenosť dvoch mimobežiek rozumie.

Nasledovne stačí, aby našli priečku mimobežiek (napr. priečka mimobežiek RI a ŠO je úsečka MK) a zo vzniknutých trojuholníkov vypočítali jej veľkosť (v našom prípade môžeme veľkosť úsečky MK vypočítať napr. z trojuholníka ŠOK, pričom jej veľkosť je 1; pozri obr. 12). V tejto úlohe je okrem práce s mimobežnými útvarmi, ktorá je sama o sebe náročná na predstavivosť, obtiažna i manipulácia so štvorstenom. Ako pomocný nástroj sme teda opäť použili softvér GeoGebra, ktorý umožňuje rotáciu telies, a tým i zvyšuje viditeľnosť vzťahov medzi jednotlivými objektmi v telese.



obr. 12: vzdialenosť mimobežiek RŠ a OI

Záver

V práci sme sa snažili demonštrovať niekoľko vybraných aktivít zo stereometrie, s ktorými sa stretnú študenti učiteľstva matematiky na FMFI UK v Bratislave. Okrem obsahovej náplne sme sa v článku zamerali i na metódy a formy práce so študentmi v priebehu sprístupňovania témy stereometria. Keďže sa snažíme, aby študenti použili nielen svoje znalosti z matematiky, ale aj jej didaktiky, našim cieľom je rozvíjať u študentov, budúcich učiteľov matematiky, predovšetkým tzv. „Pedagogical-content knowledge (PCK)“. Ako vo svojej práci píše Kohanová&Slavíčková [9], na túto zložku prípravy budúcich učiteľov (nielen) matematiky sa zabúda. Pritom stále platí, že učiteľ je dobrým učiteľom vtedy, ak je odborníkom vo svojom odbore a má dobré didaktické schopnosti, teda má PCK na vysokej úrovni. Rozvíjanie PCK je cieľom aj už spomínaného predmetu Didaktický seminár zo školskej matematiky, ktorý sme v článku stručne predstavili.

LITERATÚRA

[1] Regecová, M.: *Teaching of analytic geometry and vector calculus and proposals of problems´ solutions*, Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics, Issue 5, Comenius University in Bratislava, Comenius University Press, 2005, ISBN 80-223-2137-0

[2] Rumanová, L.: *Vedia študenti aplikovať nadobudnuté vedomosti pri riešení stereometrického problému?* Zborník bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky, Univerzita Komenského v Bratislave, PACI Computer Studio Bratislava, 2004, ISBN 80-223-1833-7

[3] Vallo, D., Záhorská, J., Ďuriš, V.: *Objavujeme sieť štvorstena*. Acta mathematica, Vol. 14, Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, 2011

[4] Pémová M.: *Utváranie interných kompetencií v stereometrii*. Dizertačná práca. Bratislava, 2008.

[5] Kohanová I.: *Metóda problem solving v príprave budúcich učiteľov matematiky*, Acta Mathematica, Vol. 13, Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, 2010, p. 127-132

[6] Vankúš P.: *Inovatívne pedagogické prístupy v príprave budúcich učiteľov matematiky*, Zborník príspevkov z III. Odbornej konferencie s medzinárodnou účasťou Quo vadis vzdelávanie k vede a technike na stredných školách, Bratislava, Mladí vedci Slovenska, 2010, ISBN 978-80-970496-4-5, s. 78-81

[7] Houdement, C., Kuzniak, A.: *Elementary geometry split into different geometrical paradigms*. Proceeding of CERME 3. Bellaria: Italy, 2003

[8] GeoGebra 3D. In: *International GeoGebra Institute*. [online]. 2011 [cit. 2011-10-31]. Dostupné na internete: http://www.geogebra.org/trac/wiki/ GeoGebra3D

[9] Kohanová, I., Slavíčková, M.: *Development of Pedagogical Content Knowledge in preparation of future mathematics' teachers*, IMEM Congress 2009, Ružomberok: Catholic University, 2009, s. 572-581

PaedDr. Michaela Regecová, PhD.
PaedDr. Mária Slavíčková, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: regecova@fmph.uniba.sk
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk

ÚLOHY NA REZY TELIES V PRÍPRAVE BUDÚCICH UČITEĽOV MATEMATIKY

DUŠAN VALLO, JÚLIA ZÁHORSKÁ

ABSTRACT. In this article we deal with specific geometry tasks which are referred to plane sections of solids. We are not concerned with detailed solutions; we demonstrate Cabri 3D software using. Our didactic approach comes out students' problems with solving these types of tasks whose study at Constantine Philosopher University in Nitra.

1. Úvod

Učivo stereometrie, ktorého súčasťou je aj učivo „Rezy telies rovinami" je často problematickým tematickým celkom nielen pre žiakov SŠ, ale aj v príprave budúcich učiteľov matematiky. Študenti 1. ročníka UKF v Nitre, učiteľstva akademických predmetov v aprobácii s matematikou, absolvujú v letnom semestri predmet Základy matematiky 2, v rámci ktorého sa stretávajú s riešením úloh zameraných na konštrukciu rezov telies rovinami. Na to, aby študenti zvládli túto problematiku, je potrebné dodržiavať zásadu názornosti vo vyučovaní, k čomu je vhodné využívať IKT, vizualizáciu na počítači.

Vo vyučovaní používame dynamický program Cabri 3D, ktorý je určený okrem iného na zostrojovanie konštrukcií priamo v trojrozmernom priestore a my ho primárne používame pri výučbe „rezov telies rovinami". Program je dostupný na stránkach internetu: http://cabri-3d-2-1-2.soft-free-download.com/sk/ alebo 30 dňová verzia na http://www.cabri.com/download-cabri-3d.html.

2. Učivo geometrie v ŠVP ISCED 3A

V ŠVP ISCED 3A, ktorý je záväzným dokumentom pre vyučovanie na gymnáziách od roku 2008, sa uvádza v matematike v tematickom okruhu Geometria a meranie: žiaci skúmajú a objavujú rovinné a priestorové útvary a ich vlastnosti, odhadom, meraním i výpočtom určujú obsahy, povrchy a objemy telies, riešia polohové a metrické úlohy z bežnej reality, dôležité miesto má rozvoj priestorovej predstavivosti. V obsahu nachádzame aj tematický celok „Rezy", ktorého pôvodné zaradenie bolo do druhého ročníka gymnázia, v súčasnosti je zaradenie do ročníka na rozhodnutí školy. Keďže s v našom príspevku venujeme problematike rezov telies rovinami, uvádzame ďalej len časti, týkajúce sa stereometrie. Vo výkonovom štandarde nachádzame:

- žiak vie v rovnobežnom premietaní načrtnúť kváder alebo jednoduché teleso zložené z malého počtu kvádrov,
- vie nakresliť bokorys a pôdorys jednoduchých útvarov zložených z kvádrov,
- žiak pozná príklady iných spôsobov znázorňovania priestoru (napr. vrstevnice alebo lineárna perspektíva),
- vie používať spôsoby dvojrozmernej reprezentácie priestoru pri riešení jednoduchých úloh,
- vie vypočítať povrch a objem telies pomocou daných vzorcov vrátane jednoduchých prípadov, keď je potrebné niektoré údaje dopočítať z ostatných údajov,

Príspevok vznikol za podpory grantu KEGA 038UKF – 4/ 2011 s názvom *Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh.*

- vie v jednoduchých prípadoch zobraziť rez telesa rovinou,
- žiak pozná súvislosti rezu guľou so súradnicovým systémom,
- vie riešiť jednoduché úlohy vyžadujúce priestorovú predstavivosť.

V štandarde kompetencií sa okrem iného uvádza:
Štúdium matematiky na strednej škole prispieva k rozvoju kľúčových kompetencií,

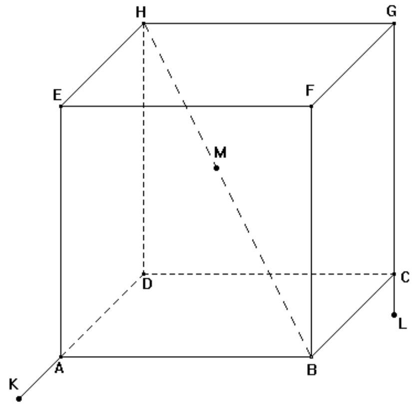
- kompetencia v oblasti informačných a komunikačných technológií,
- žiak má osvojené základné zručnosti v oblasti IKT ako predpoklad ďalšieho rozvoja,
- používa základné postupy pri práci s textom a jednoduchou prezentáciou,
- dokáže vytvoriť jednoduché tabuľky a grafy a pracovať v jednoduchom grafickom prostredí,
- dokáže využívať IKT pri vzdelávaní.

3. Použitie „Cabri 3D“ v riešení úloh

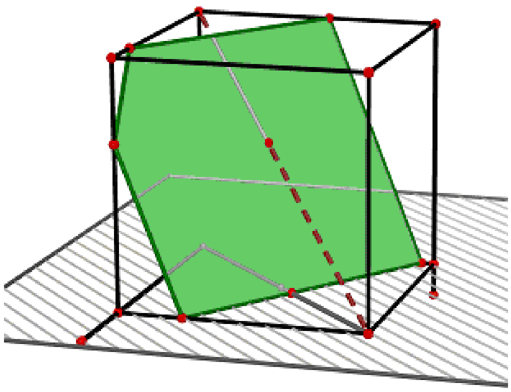
Ďalej uvádzame riešené príklady na rezy telies rovinami, s akými sa stretávajú študenti 1. ročníka UKF v Nitre v predmete Základy matematiky 2. Úlohy takéhoto typu sú pre nich problematické. Zo skúseností s výučbou konštatujeme, že s použitím programu Cabri 3D vo vyučovacom procese dosahujeme vyšší záujem študentov o riešenie úloh uvedeného typu, ako aj lepšie výsledky v ich riešení, čo sa napokon prejavuje aj na ich známkach.

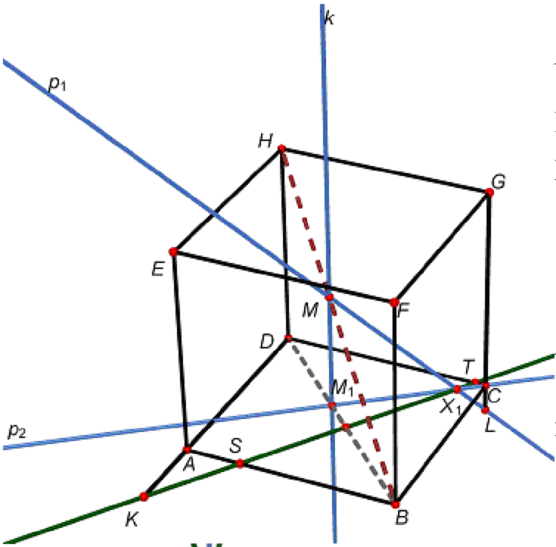
Príklad 1. *Zostrojte rez kocky ABCDEFGH rovinou* $\overleftrightarrow{KLM}$ *, ak bod K leží na polpriamke* $\overrightarrow{DA}$ *za bodom A, bod L leží na polpriamke* $\overrightarrow{GC}$ *za bodom C a bod M leží na telesovej uhlopriečke BH.*

Znázornenie podľa zadania:



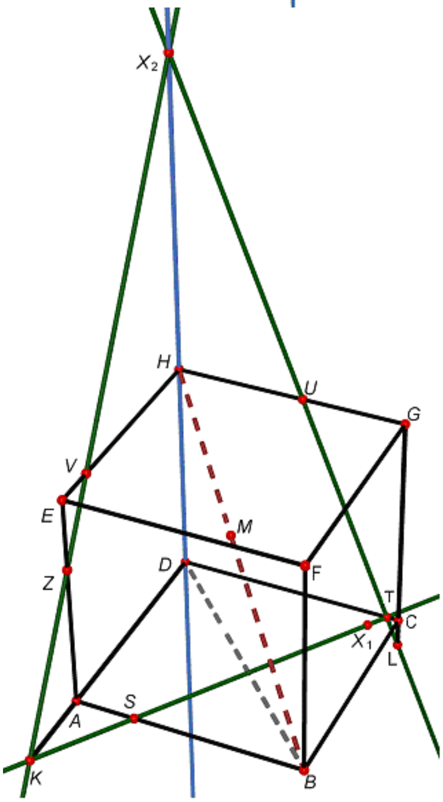
Riešenie:



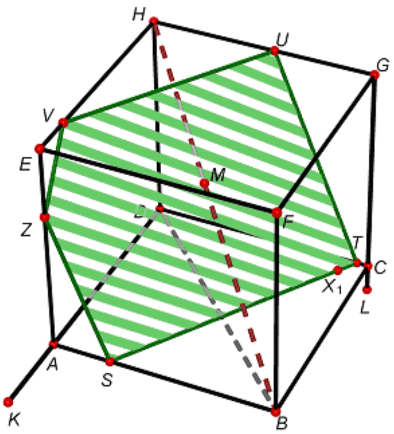


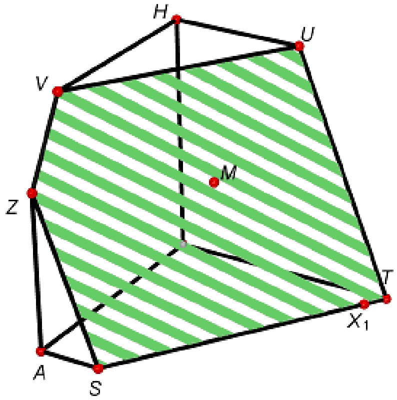
Komentár k riešeniu:

Kolmým priemetom bodu L do roviny podstavy $\overleftrightarrow{ABC}$ je bod C a bodu M je bod M_1, ktorý je potrebné zostrojiť. Potom bod $X_1 \in \overleftrightarrow{M_1C} \cap \overleftrightarrow{ML}$ patrí rovine rezu $\overleftrightarrow{KLM}$ a súčasne je bodom roviny podstavy $\overleftrightarrow{ABC}$. Zostrojením priamky $\overleftrightarrow{KX_1}$ dostaneme body $S, T; S \in AB\, a\, T \in CD$, ktoré sú bodmi roviny rezu.



Ďalej zostrojíme priamku $\overleftrightarrow{TL}; \overleftrightarrow{TL} \in \overleftrightarrow{CDH}$. Označme U bod roviny rezu, pre ktorý platí $U \in \overleftrightarrow{TL} \cap \overleftrightarrow{HG}$.
Nech $X_2 \in \overleftrightarrow{TL} \cap \overleftrightarrow{DH}$. Keďže $\overleftrightarrow{DH} \in \overleftrightarrow{CDH}$ a súčasne $\overleftrightarrow{DH} \in \overleftrightarrow{ADH}$ z toho vyplýva, že $X_2 \in \overleftrightarrow{DH}$ je zároveň bodom roviny $\overleftrightarrow{ADH}$ rovnako ako aj bod K. Zostrojením priamky $\overleftrightarrow{KX_2}$ získame posledné body roviny rezu V, Z; $V \in \overleftrightarrow{KX_2} \cap EH \wedge Z \in \overleftrightarrow{KX_2} \cap AE$.

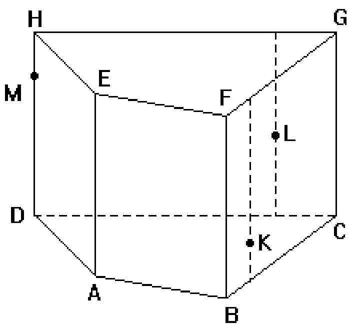




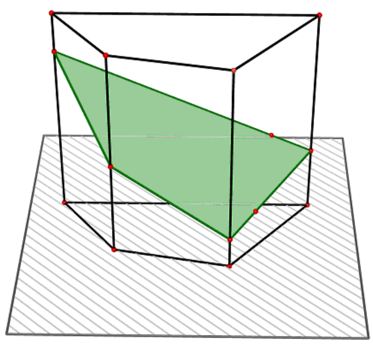
Posledným krokom je zostrojenie mnohouholníka *STUVZ*, ktorý je rezom kocky *ABCDEFGH* rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$. Použitím funkcie „zrezať mnohosten“ môže študent nadobudnúť úplnú predstavu o danej konštrukcii.

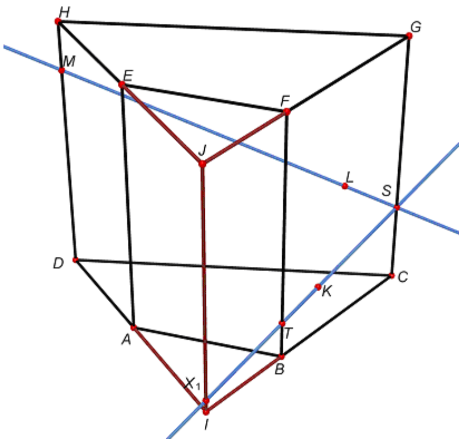
Príklad 2. *Zostrojte rez štvorbokého hranola ABCDEFGH rovinou* $\overleftrightarrow{KLM}$ *: podstava je všeobecný štvoruholník, body K, L sú postupne vnútornými bodmi stien BCGF, DCGH a bod M je vnútorným bodom hrany DH*

Znázornenie podľa zadania:



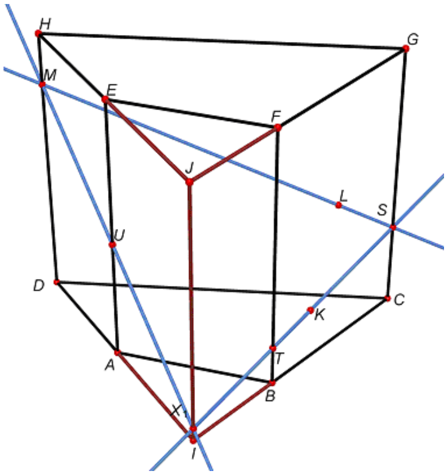
Riešenie:



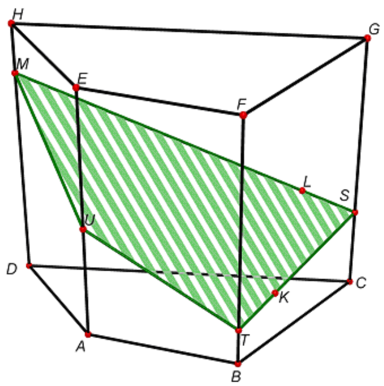


Komentár k riešeniu:

Využívame doplnenie na trojboký hranol $ICDJGH$. Zostrojíme priamku $\overleftrightarrow{ML}$ a dostaneme bod rezu $S \in \overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{CG}$. V ďalšom kroku zostrojíme priamku $\overleftrightarrow{SK}$. Bod $T \in \overleftrightarrow{SK} \cap BF$ je bodom rezu. Ďalší bod $X_1 \in \overleftrightarrow{SK} \cap IJ$ využijeme v konštrukcii posledného bodu rezu.



Zostrojíme priamku X_1M. Posledný bod roviny rezu je U, pre ktorý platí: $U \in X_1M \cap AE$.



Zostrojíme mnohouholník $STUM$, ktorý je rezom štvorbokého hranola $ABCDEFGH$ rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$.

4. Záver

Výhodou použitia programu Cabri 3D v riešení je názornosť. Študenti majú možnosť sledovať riešenie v jednotlivých fázach pootáčaním zostrojeného útvaru a prípadne aj odhaliť nesprávny krok v riešení. Z obrázkov je zrejmé, že program vytvára konštrukcie, ktoré nie sú zostrojené v rovnobežnom premietaní, na čo študentov upozorníme. Dôležitá je aj problematika viditeľnosti hrán. Kým študenti zostrojujú konštrukcie do zošitov, musia patrične zvýrazniť aj jednotlivé hrany podľa platných zásad premietania. Program používa kostrové modely telies a interaktivita konštrukcií nevyžaduje vyznačovať jednotlivé hrany čiarkovane.

K riešeniam, resp. komentárom, príkladov ešte poznamenávame tieto drobné didaktické postrehy:

a) v 1. príklade sa študenti najčastejšie dopúšťajú chyby hneď na začiatku riešenia. Problémom je nájdenie bodu X_1, ďalšieho bodu roviny podstavy. S použitím programu Cabri 3D často postupujú metódou „pokus – omyl“ a vizuálne, otáčaním objektov a konštrukciou priamok, či rovín, overujú polohu bodov, ktoré zostroja.

b) V druhom príklade je problematickým „nápad“, ako postupovať v riešení. Vhodne volenými otázkami sa niektorí študenti dopracujú k správnemu postupu.

c) Vo vyučovaní sa stretávame s tým, že hlavne študenti s nižšou úrovňou priestorovej predstavivosti sú úspešnejší v riešení úloh na rezy telies rovinami, ak používame vo vyučovaní uvedený program. Vo väčšine prípadov si konštrukcie realizujú tiež s použitím Cabri 3D.

LITERATÚRA

[1] Drábeková, J. – Rumanová, L.: *Využitie didaktických softvérov v niektorých častiach matematiky*, Nitra, In: Medzinárodné vedecké dni 2008 - zborník recenzovaných príspevkov z medzinárodnej vedeckej konferencie. SPU Nitra 2008, s. 1231-1235. ISBN 978-80-552-0061-3

[2] Pavlovičová, G. - Rumanová, L.: *Rozvoj priestorovej predstavivosti s využitím Cabri 3D*. Bratislava: In. E-matik 2007 : *E-learning v matematike, matematika v E-learningu*, Bratislava - Slovakia, September 10-12, 2007, - Bratislava: UK, 2007. - nestr.

[3] Šedivý, O. a kol.: *STEREOMETRIA- umenie vidieť a predstavovať si priestor*, FPV UKF Nitra, 2007, ISBN 978-80-8094-180-2

[4] Štátny pedagogický ústav: *Štátny vzdelávací program MATEMATIKA - príloha ISCED 3A*, 2011, Dostupné: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced3a.pdf

[5] Štátny pedagogický ústav: *Štátny vzdelávací program pre gymnázia v SR ISCED 3A – Vyššie sekundárne vzdelávanie,* 2011, Dostupné: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/isced3_spu_uprava.pdf

[6] Vidermanová, K.: *Výučba stereometrie a rozvoj priestorovej predstavivosti pomocou počítačových programov*, In: Informačné a komunikačné prostriedky vo vzdelávaní v matematike, Nitra, FPV UKF, Prírodovedec č. 199, 2005, ISBN 80-8050-925-5- S.

RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: dvallo@ukf.sk

PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: jzahorska@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA

KLASIFIKÁCIA ŠTVORSTENOV PODĽA IM OPÍSANÝCH ROVNOBEŽNOSTENOV

DUŠAN VALLO

ABSTRACT. In this article we present a special approach to a classification of various types of tetrahedrons by using the described parallelepipeds.

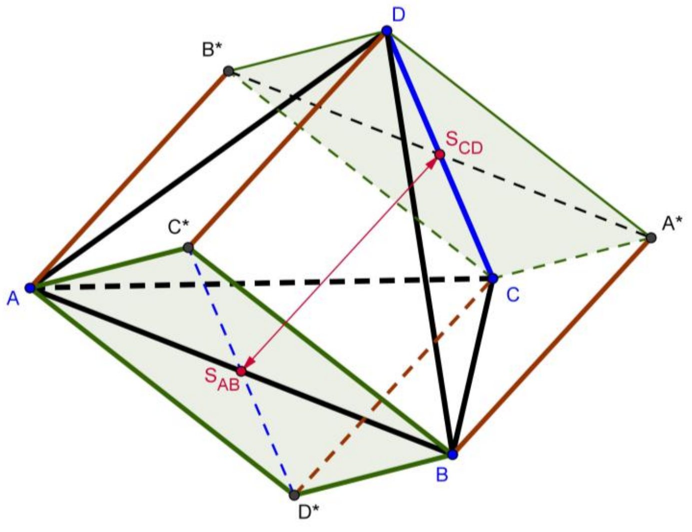
Úvod

Štvorsten patrí k základným priestorovým útvarom, ktorý žiaci väčšinou poznajú pod pojmom trojboký ihlan. V tomto skromnom príspevku sa zameriame na charakterizáciu jednotlivých typov štvorstenov podľa toho, aký rovnobežnosten mu možno opísať. V prvom rade uvedieme konštrukciu rovnobežnostena opísaného štvorstenu. Neskôr na základe nutných a postačujúcich podmienok určujúcich daný štvorsten potom priradíme tomuto telesu odpovedajúci rovnobežnosten.

Rovnobežnosten opísaný štvorstenu

Nasledujúca veta tvrdí, že každému štvorstenu možno opísať rovnobežnosten.

***Veta** 1. Štvorsten možno umiestniť do rovnobežnostena tak, že jeho hrany sú stenovými uhlopriečkami rovnobežnostena.*



Obr. 1

Dôkaz. Uvažujme o štvorstene $ABCD$. Ak označíme stredy protiľahlých hrán AB, CD postupne S_{AB}, S_{CD}, potom v smere vektora $\overrightarrow{S_{CD}S_{AB}}$ posunieme hranu CD a zostrojíme

Príspevok vznikol za podpory grantu KEGA 038UKF – 4/ 2011 s názvom *Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh.*

úsečku C^*D^*. Štvoruholník AD^*BC^* je rovnobežníkom, pretože jeho uhlopriečky AB, C^*D^* sa rozpoľujú.

Ak posunieme hranu AB v smere vektora $-\overrightarrow{S_{CD}S_{AB}}$), potom dostaneme rovnobežník B^*CA^*D, ktorý je zhodný so rovnobežníkom AD^*BC^*.

Dva zhodné a navzájom rôzne rovnobežníky AC^*DB^*, D^*BA^*C v priestore, ktorých odpovedajúce si strany sú rovnobežné, určujú rovnobežnosten $AC^*DB^*D^*BA^*C$.

Poznatok, že štvorstenu možno opísať rovnobežnosten, je dôležitý. Niektoré základné vety o štvorstene ľahko dokážeme, ak použijeme vetu 1. Napríklad:

a) *Stredy úsečiek, ktorých koncové body sú stredmi protiľahlých hrán štvorstena, sú totožné.*

b) *Ťažnice štvorstena sa pretínajú v jednom bode – ťažisku.*

c) *Úsečky určené stredmi protiľahlých hrán štvorstena sa pretínajú v jeho ťažisku.*

Dôkazy nájdeme v [1].

Podľa vety 1 opíšeme každému štvorstenu jednoznačne rovnobežnosten. Prehľad v rovnobežnostenoch môžeme spraviť podľa tabuľky.

Steny			**Počty stien**			
	dolná podstava	**protiľahlé bočné steny**	**štvorec**	**kosoštvorec**	**obdĺžnik**	**kosodĺžnik**
1.	štvorec	štvorce	6	0	0	0
2.		2 kosoštvorce 2 štvorce	4	2	0	0
3.		kosoštvorce	2	4	0	0
4.		obdĺžniky	2	0	4	0
5.		2 kosodĺžniky 2 obdĺžniky	2	0	2	2
6.		kosodĺžniky	2	0	0	4
7.	kosoštvorec	kosoštvorce	0	6	0	0
8.		obdĺžniky	0	2	4	0
9.		kosodĺžniky	0	2	0	4
10.	obdĺžnik	2 kosoštvorce 2 kosodĺžniky	0	2	2	2
11.		obdĺžniky	0	0	6	0
12.		2 obdĺžniky 2 kosodĺžniky	0	0	4	2
13.		kosodĺžniky	0	0	2	4
14.	kosodĺžnik	kosodĺžniky	0	0	0	6

Tabuľka rovnobežnostenov

Budeme rozlišovať aj niekoľko typov štvorstenov:

a) **ortogonálny štvorsten –** štvorsten, ktorého dve dvojice výšok sa pretínajú, ale neexistuje spoločný priesečník všetkých štyroch výšok,

b) **ortocentrický štvorsten** – štvorsten, ktorého všetky štyri výšky sa pretínajú v jednom bode nazývanom *ortocentrum*,

c) **rovnostenný štvorsten** – štvorsten, ktorého steny sú navzájom zhodné trojuholníky,

d) **kostrový štvorsten –** štvorsten, ktorému možno vpísať, resp. pripísať, guľovú plochu tak, že sa dotýka priamok, na ktorých ležia hrany daného štvorstena,. Guľovú plochu nazývame *polovpísanou*, resp. *pripísanou*, guľovou plochou štvorstena.

e) **Pravouhlý štvorsten** – štvorsten, ktorého rovinné uhly pri jednom vrchole sú pravé.

Jednotlivé typy štvorstenov charakterizujú nasledujúce vety, ktoré uvádzame bez dôkazov. Čitateľa odkazujeme na [1].

***Veta** 2. Výšky štvorstena $ABCD$ prechádzajúce vrcholmi A, D sú rôznobežné vtedy a len vtedy, keď sú protiľahlé hrany AD, BC na seba kolmé.*

***Veta** 3. Ak má štvorsten dve dvojice kolmých protiľahlých hrán, potom existuje aj tretia dvojica protiľahlých hrán, ktoré sú na seba kolmé.*

***Veta** 4. Protiľahlé hrany rovnostenného štvorstena sú rovnako dlhé.*

***Veta** 5. Štvorsten $ABCD$ má polovpísanú guľovú plocha vtedy a len vtedy, keď platí*

$$|AD|+|BC|=|BD|+|CA|=|CD|+|AB|.$$

***Veta** 6. Guľová plocha, dotýkajúca sa hrán AB, BC, CA štvorstena $ABCD$ a polpriamok DA, DB, DC existuje vtedy a len vtedy, keď platí*

$$\big||AD|-|BC|\big|=\big||BD|-|CA|\big|=\big||CD|-|AB|\big|.$$

Už na prvý pohľad je zrejmé, že **pravidelný štvorsten** je *ortocentrickým*, *rovnostenným*, a aj *kostrovým* štvorstenom (má jednu polovpísanú guľovú plochu a štyri navzájom zhodné pripísané guľové plochy). Určite nie je pravouhlým štvorstenom, keďže rovinné uhly pri každom vrchole majú veľkosť 60°. Pravidelný štvorstena je teda vpísaný do **kocky**. V uvedenej tabuľke je prislúcha riadok č. 1.

Podľa vety 2 platí, že v **ortogonálnom štvorstene** musí byť *práve jeden* pár kolmých protiľahlých hrán. Podľa dôkazu vety 1, vo vhodnom posunutí sa jedna hrana štvorstena zobrazí do stenovej uhlopriečky uvažovaného rovnobežnostena. Z toho dôvodu ortogonálnemu štvorstenu môže byť opísaný rovnobežnosten, ktorý je uvedený v niektorom riadku č. 4, 5, 6, 8, 9 alebo č. 10. Každý z rovnobežnostenov má len dve protiľahlé steny s navzájom kolmými stenovými uhlopriečkami. Ide o steny, ktoré sú štvorcami. prípadne kosoštvorcami.

Naproti tomu **ortocentrický štvorsten** musí byť opísaný rovnobežnostenu, ktorého aspoň štyri steny sú štvorce, prípadne kosoštvorce, resp. ich kombinácia. Vychádzame z viet 2 a 3. Do úvahy tak prichádzajú rovnobežnosteny z riadkov č. 1, 2, 3 a č. 7. Riadku č. 7 zodpovedá teleso nazývané **romboéder**.

Podľa vety 4 sú protiľahlé hrany **rovnostenného štvorstena** rovnakej dĺžky, preto aj stenové uhlopriečky všetkých trojíc protiľahlých stien opísaného rovnobežnostena musia mať rovnakú dĺžku. Uvažujeme teda rovnobežnosteny, ktoré nemajú steny kosoštvorce, prípadne kosodĺžniky. Ide o telesá z riadkov č. 1, 4 a č. 11. Kým riadku č. 1 odpovedá kocka opísaná pravidelnému štvorstenu a riadku č. 4 zodpovedá pravidelný štvorboký hranol, riadku č. 11 zodpovedá **kváder**.

Veta 5, resp. 6, hovorí o nutnej a postačujúcej podmienke pre existenciu **kostrového štvorstena**. Voľná formulácie týchto viet tvrdí, že súčet, resp. rozdiel, dĺžok stenových uhlopriečok je konštantný. Ako sme už uviedli, obom požiadavkám vyhovuje pravidelný štvorsten vpísaný do **kocky** (riadok č. 1). Nie je to však jediný rovnobežnosten, kedy sú obe podmienky splnené. Ide o rovnobežnosten z riadku č. 7, ktorý je **romboéder.**

V oboch prípadoch, kocky a aj romboédru, k vpísanému štvorstenu existuje celkom šesť guľových plôch – jedna opísaná guľová plocha, jedna vpísaná guľová plocha, jedna polovpísaná a 4 pripísané guľové plochy. Je to spôsobené tým, že pri cyklickej zámene vrcholov v závere vety 6 opäť dostávame konštantný rozdiel odpovedajúcich si dĺžok. Nie vždy však existujú všetky 4 pripísané guľové plochy. Existencia niektorých z nich je podmienená konkrétnymi rozmermi uvažovaného rovnobežnostena a nedá sa všeobecne určiť spôsobom, ktorý sme zaviedli v tomto článku.

Zostáva nám ešte určiť rovnobežnosteny, ktoré sú opísané **pravouhlému štvorstenu**. Vzhľadom k tomu, že ľubovoľné protiľahlé hrany tohto štvorstena sú na seba kolmé, je pravouhlý štvorsten aj *ortocentrickým* štvorstenom a problematika je vyriešená s odvolaním sa na vyššie uvedené.

Záver

V príspevku sme sa zamerali na určovanie jednotlivých typov štvorstenov pomocou im opísaných rovnobežnostenov. Uviedli sme základné vlastnosti predmetných štvorstenov a odvolali sme sa na príslušné literárne zdroje. Zo skúseností, ktoré vyplývajú z výučby predmetu s názvom Geometria telies na KM FPV UKF v Nitre, považujme tento prístup ku klasifikácii štvorstenov za vhodný a názorný, nakoľko sa študenti pomerne ľahko a s prehľadom orientujú vo vlastnostiach rovnobežnostenov.

LITERATÚRA

[1] Vallo, D. – Šedivý, O.: *Mnohosteny 1. Cesta k rozvoju geometrických predstáv*, FPV UKF v Nitre, Edícia Prírodovedec č. 418, Nitra, 2010, ISBN: 978-80-8094-735-4, s. 108

[2] Vankúš, P. (2007): *Rozvoj matematických vedomostí žiakov prostredníctvom didaktických hier*, In: Zborník príspevkov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory FMFI UK, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, ISBN 978-80-89186-18-1, s. 77–80.

[3] Vidermanová, K.: *Využitie stavebnice Polydron vo vyučovaní stereometrie*. In. Didaktické hry a aplikačné úlohy vo výučbe matematiky pre 2. st. ZŠ, FPV UKF v Nitre, Edícia Prírodovedec č. 311. Nitra 2008, ISBN: 978-80-8094-346-2, s. 39-42

[4] Vidermanová, K.: *Stereometrické úlohy v certifikovaných meraniach Monitor 9 a Maturita*. In. DiDZa 2008, Nové trendy vo vyučovaní matematiky a informatiky na základných, stredných a vysokých školách. ZU v Žiline 2008, ISBN: 978-80-8070-863-4

[5] Žilková, K.: *C.a.R. zadania – metóda internetových konštrukčných úloh (cvičení).* In. DiDZa 2008, Nové trendy vo vyučovaní matematiky a informatiky na

základných, stredných a vysokých školách. ZU v Žiline 2008, ISBN: 978-80-8070-863-4

[6] Kohanová I., Slavíčková M.: *Development of Pedagogical Content Knowledge in preparation of future mathematics' teachers*, IMEM Congress 2009, Ružomberok: Catholic University, 2009, p. 572-581

[7] Židek, O.: *Špeciálne konvexné mnohosteny a problém vyplňovania priestoru*. In. DiDZa 2008, Nové trendy vo vyučovaní matematiky a informatiky na základných, stredných a vysokých školách. ZU v Žiline 2008, ISBN: 978-80-8070-863-4

[8] Regecová, M. – Slavíčková, M.: *Dynamický softvér v príprave budúcich učiteľov matematiky*. In: Nové trendy v teórii vyučovania matematiky. Dynamický softvér vo vyučovaní. Zborník príspevkov z vedeckého seminára. FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 443, ISBN: 978-80-8094-853-5, s. 46 – 54.

[9] Žilková, K.: *Heuristika v informatizácii výučby matematiky.* Metodicko – pedagogické centrum, 2006. ISB: 80-8052-261-8

RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: dvallo@ukf.sk

ÚVOD DO STEREOMETRIE POMOCOU STAVEBNICE POLYDRON

KITTI VIDERMANOVÁ - ALENA VIZIOVÁ - JANKA MELUŠOVÁ

ABSTRACT. This article deals with the teaching of spatial geometry in upper-secondary education. We describe the results of the exploration study in which we piloted the using of manipulative activities with Polydron by education of basics concepts of spatial geometry.

Úvod

Učivo priestorovej geometrie je zaradené v štátnom vzdelávacom programe do tematického okruhu Geometria a meranie. V obsahu vzdelávania je zahrnuté:

- Znázorňovanie do roviny, rovnobežné premietanie.
- Hranaté telesá, ich povrch a objem.
- Rezy.
- Oblé telesá, ich povrch a objem, myšlienka odvodenia pomocou Cavalieriho princípu.

Učebný plán tematického celku Stereometria v tomto ročníku je rozvrhnutý nasledovne:

Trieda Septima A (jazyková trieda): 3 hodiny matematiky týždenne, 26 vyučovacích hodín venovaných tematickej oblasti Stereometria.

Trieda Septima B (zameraná na programovanie): 4 hodiny matematiky týždenne, 35 vyučovacích hodín venovaných tematickej oblasti Stereometria.

V učive pre štvorročné gymnázium je oblasť Stereometrie zaradená do 2. ročníka, počet hodín venovaných tejto problematike je 19 vyučovacích hodín.

Rozsah učiva je rovnaký pre všetky tri triedy bez ohľadu na časovú dotáciu.

Cieľové ***požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov*** z matematiky, oblasť Stereometria – Telesá (od šk. r. 2011/2012):

Obsah:

Pojmy: teleso, mnohosten, vrchol, hrana, stena, kocka, sieť kocky, hranol, kolmý a pravidelný hranol, kváder, rovnobežnosten, ihlan, štvorsten, podstava, výška v štvorstene, guľa, valec, kužeľ, objemy a povrchy telies.

Vlastnosti a vzťahy: vzorce na výpočty objemov a povrchov telies.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti:

Žiak vie:

- rozhodnúť, či daná sieť je sieťou telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- načrtnúť sieť telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- riešiť úlohy, ktorých súčasťou je výpočet objemu, resp. povrchu kocky, kvádra, pravidelného kolmého hranola, pravidelného ihlana, gule, valca, kužeľa a vie pritom nájsť a aktívne použiť vzorce pre výpočet objemov a povrchov telies potrebné pre vyriešenie úlohy.

Príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu KEGA -> 038UKF-4/2011: Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh

Vyučovanie priestorovej geometrie začína úvodnou hodinou, na ktorej sa študenti oboznámia so základnými pojmami stereometrie, konkrétne: teleso, mnohosten, pravidelné mnohosteny, sieť mnohostena, konvexné a nekonvexné telesá. V dvoch triedach, Septima A a Septima B nitrianskeho gymnázia na Golianovej ulici sme overovali vhodnosť použitia stavebnice Polydron vo vyučovaní úvodnej hodiny stereometrie. Zamerali sme sa na dve hľadiská:

- časové hľadisko, t. j. koľko minút z vyučovacej hodiny zaberú jednotlivé úlohy,
- prijatie manipulácie so stavebnicou študentmi na hodinách matematiky.

Stavebnica Polydron ©

Stavebnica umožňuje ľahké a rýchle konštruovanie geometrických telies a precvičovanie, resp. skúmanie niektorých ich vlastností. Základná školská verzia stavebnice (obr. 1) obsahuje 460 kusov z ôsmych rovinných útvarov: rovnostranný trojuholník (v dvoch veľkostiach, menších 160 ks, väčších 20 ks), rovnoramenný trojuholník (40 ks), pravouhlý rovnoramenný trojuholník (80 ks), štvorec (80 ks), obdĺžnik (20 ks), pravidelný päťuholník (40 ks) a pravidelný šesťuholník (20 ks). Jednotlivé útvary sú vyrábané z umelej hmoty v štyroch farbách: červená, modrá, zelená a žltá. Základná vlastnosť modelov uvedených *n*-uholníkov spočíva v možnosti jednoduchého spájania pomocou jedinečnej závesnej svorky. Na spojenej hrane je možné vykonať „ohýbanie“. Táto vlastnosť umožňuje využitie týchto modelov pri zhotovovaní rôznych konvexných i nekonvexných telies. Ďalším krokom autorov bolo vytvorenie „plnej“ verzie stavebníc, t.j. rovinné útvary sú nepriehľadné. Rovinné útvary sa doplnili o časti priestorových telies (obr. 2). Tým je umožnená stavba nielen mnohostenov, ale napr. aj gule, valca, atď.)

Obr. 1

Obr. 2

Priebeh vyučovacej hodiny

V triede Septima A sme mali na vyučovacej hodine prítomných 26 študentov, v triede Septima B sme mali delenú hodinu – na jednej hodine 15 študentov, na druhej hodine 14 študentov. V rámci vyučovania sme mali k dispozícii 5 stavebníc Polydron (zobrazenú na obr.1) a tak sme študentov rozdelili na každej hodine do 5 skupín.

Prvá naša otázka bola: Čo rozumieme v matematike pod pojmom teleso? Odpovede písali študenti na papier. Zaznamenali sme:

- geometrický útvar.
- priestorový (trojrozmerný) útvar.
- priestorový (trojrozmerný) útvar ľubovoľného tvaru a veľkosti.
- priestorový útvar, ktorý má svoje charakteristické vlastnosti a určité rozmery.
- priestorový útvar ohraničený stenami, ktorý má svoj povrch a objem.
- priestorový útvar ohraničený vrcholmi, ktoré sú spájané úsečkami a vytvárajú útvar.
- priestorový trojrozmerný útvar, ktorý môžeš chytiť (vidíme ho).
- dvojrozmerný alebo trojrozmerný útvar definovaný bodom alebo skupinou bodov a ich spojnicami a plochami.
- priestorový útvar, ktorý sa skladá zo strán a hrán.
- predmet alebo útvar, ktorý sa skladá z podstavy a plášťa, má určitý počet stien, vrcholov a hrán.

Porovnajme ich odpovede s definíciou: ***Teleso*** *je ohraničená oblasť v priestore a jej hranice*. Vidíme, že niektorí študenti popísali teleso veľmi blízko korektnej definícii.

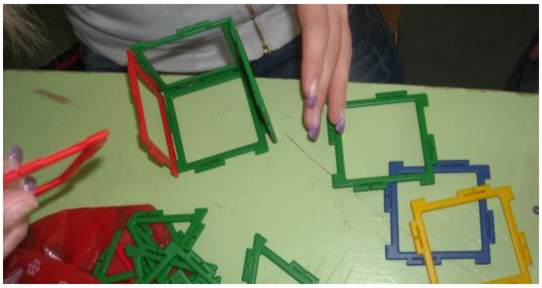
Po tejto úlohe sme žiakov oboznámili s pojmom mnohosten:
Špeciálnym prípadom telesa je ***mnohosten*** (označujeme aj ako *n*-sten). *Je to teleso, ktorého hranica je zjednotením n hraničných mnohouholníkov (*$n \in \mathbb{N}, n > 3$*) tak, že strana každého jedného z nich je súčasne stranou iného, pričom obidva mnohouholníky neležia v jednej rovine.*

Otázka pre študentov: Aké iné telesá poznáme okrem mnohostenov?

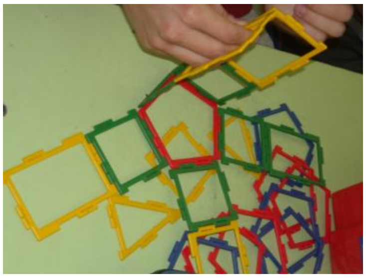
Pokračovali sme úlohou: Z dielov stavebnice Polydron postavte ľubovoľný mnohosten.

Poznámka. Na túto úlohu sme žiakom dali približne 15 minút čas, pretože v rámci nej prvýkrát pracovali so stavebnicou. Myslíme si však, že na túto aktivitu postačí aj 5 minút.

Žiaci postavili ľubovoľné telesá, medzi nimi sa najčastejšie vyskytovala kocka. To nás neprekvapilo, keďže je to teleso, s ktorým sa študenti najčastejšie stretávajú.

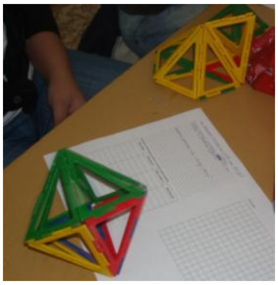


Obr. 3



Obr. 4

Obr. 5



Obr. 6

Obr. 7

Jeden študent zhotovil stavbu, ktorá ale nespĺňala definíciu telesa (obr. 7). Túto stavbu sme ukázali ostatným študentom, a položili sme otázku: *Považujeme túto tavbu za teleso?* Študenti hneď zareagovali, že daná stavba nie je teleso, pretože nie je ohraničená.

Na postavených modeloch sme si so študentmi zopakovali pojmy ako podstava a plášť mnohostena, vrcholy, hrany, steny, uhlopriečky (stenové i telesové).

Otázka pre študentov: Čím je kocka taká významná?
Študenti odpovedali, že má všetky steny zhodné štvorce.

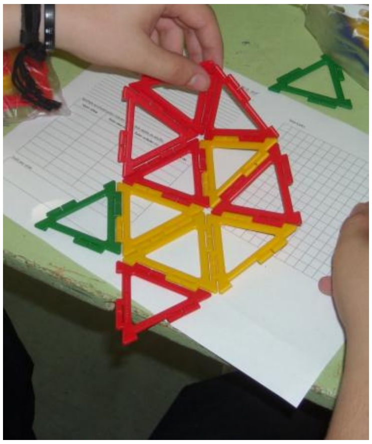
Zadefinovali sme ***pravidelný mnohosten:*** *je to taký mnohosten, ktorého všetky steny sú zhodné pravidelné mnohouholníky a každým vrcholom prechádza rovnaký počet hrán, pričom všetky vrcholy ležia na jednej guľovej ploche*. Ak študenti nevedia, čo guľová plocha je, oboznámime ich aj s týmto pojmom. Študenti v našich triedach tento pojem ovládali už z analytickej geometrie.

Otázka pre študentov (odpovede písali na papier): Ktoré mnohosteny považujete za pravidelné telesá?
Zo študentských odpovedí vyberáme: kocka, kváder, ihlan, štvorsten, osemsten, dvanásťsten, dvadsaťsten.

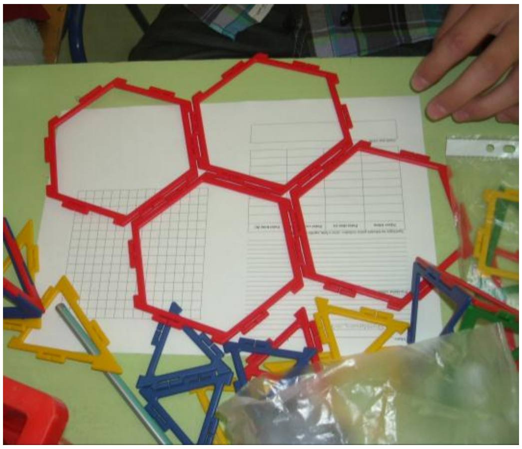
Napriek tomu, že sme definíciu pravidelného mnohostena uvideli ešte pred touto otázkou, mnoho študentov sa pomýlilo a časté odpovede boli ihlan a kváder.

Poznámka: Niektorí študenti uviedli, že sa s pravidelnými mnohostenmi stretli už skôr, a teda ich poznali, nevedeli však, že ich počet je päť, a teda skúšali v ďalšej úlohe nájsť aj iné pravidelné telesá. Keďže ich odpovede na poslednú otázku sme neprečítali pred celou triedou, všetci študenti riešili ďalšiu úlohu bez ovplyvňovania.

Otázka pre študentov: Aké iné telesá môžeme ešte postaviť z jedného druhu mnohouholníkov? Pomocou pravidelných mnohouholníkov zo stavebnice nájdite čo najviac pravidelných mnohostenov. Koľko ich existuje?
V rámci tejto aktivity sme sa pohybovali medzi študentmi a sledovali sme ich prácu. Vyskytol sa problém vypĺňania roviny – pri ukladaní rovnostranných trojuholníkov (obr. 8) a pravidelných šesťuholníkov (obr. 9). Študenti sami objavili, že z pravidelných šesťuholníkov pravidelné teleso neposkladajú, a pri stavaní dvadsaťstena musia vybrať jeden trojuholník, aby nevytvárali rovinu.

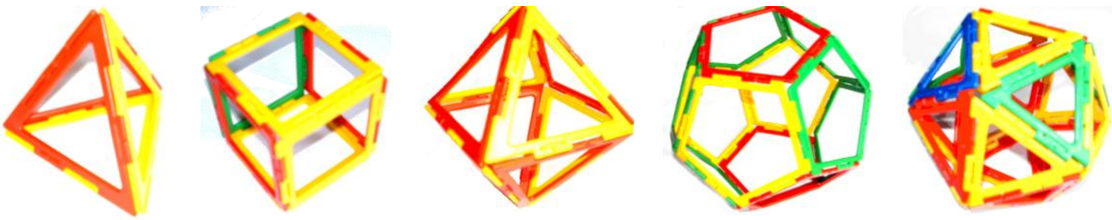


Obr. 8



Obr. 9

Študenti v rámci každej skupiny vždy našli všetkých päť pravidelných mnohostenov (obr. 10). Oboznámili sme ich s pomenovaním Platónske telesá.

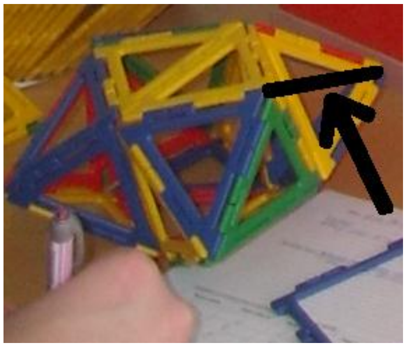


Štvorsten *Kocka* *Osemsten* *Dvanásťsten* *Dvadsaťsten*

Obr. 10

Ďalším pojmom, s ktorým sme študentov oboznámili, bol pojem konvexné teleso. ***Konvexné teleso*** *je také teleso, ktoré obsahuje každú úsečku, ktorej krajné body sú ľubovoľné dva body telesa.*
Medzi študentmi postavenými mnohostenmi sme našli nekonvexné teleso (obr. 11). Na tomto telese sme študentom názorne predviedli, prečo je toto teleso nekonvexné (obr. 12).

Obr. 11



Obr. 12

Poslednou aktivitou študentov je objavenie vzťahu medzi počtom stien, hrán a vrcholov konvexných mnohostenov - ***Eulerovu vetu***.

Študentom sme na tabuľu nakreslili tabuľku a zároveň sme im ju rozdali na papieroch.

Názov telesa	**Počet stien (s)**	**Počet vrcholov (v)**	**Počet hrán (h)**

Otázka pre študentov: Existuje vzťah medzi počtom stien, vrcholov a hrán mnohostenov?

Študenti si zapisovali jednotlivé údaje do svojich papierov a zároveň chodili zapisovať na tabulu. Vo všetkých triedach objavili študenti vzťah medzi počtom stien, vrcholov a hrán mnohostenov (obr. 13). Zároveň objavili aj to, že tento vzťah pre nekonvexné telesá neplatí.

Poznámka: Na delených hodinách Septimy B sme stihli študentov oboznámiť s dualitou telies kocka, osemsten a dvanásťsten - dvadsaťsten. V triede Septima A sme túto aktivitu už nestihli.

Spočítajte na telesách počet vrcholov, stien a hrán zapíšte do tabuľky.

Názov telesa	Počet stien (s)	Počet vrcholov (v)	Počet hrán (h)
4-stien	4	4	6
kocka	6	8	12
8-stien	8	6	12
12-stien	12	20	30
20-stien	20	12	30
domček	9	9	16
niečo	14	25	40

4+4-2=6

14-2=12

Zistili sme vzťah:

$s + v - 2 = h$

Obr. 13: Študentské riešenie

Názory žiakov na využívanie stavebnice Polydron vo vyučovaní matematiky

Študentom sme po hodine rozdali krátky dotazník s troma položkami.

1. otázka: Vyjadrite svoj názor na vyučovaciu hodinu, na ktorej ste pracovali s konštrukčnou stavebnicou Polydron. Odpoveď zdôvodnite.

- Hodina bola aktívna, zaujímavá, pútavá, zábavná.
- Bola poskytnutá kvalitná pedagogická pomoc pri vysvetľovaní učiva a aj pri stavaní.
- Bolo dobré, že sme sa neučili iba teoreticky, a bola to aj zábava.
- Pozitívne hodnotím, naučil som sa o telesách viac, keď som ich mohol sám stavať a popozerať.
- Prvý krát sa stalo, že na hodine všetci spolužiaci dávali pozor.

2. otázka: Privítali by ste používanie Polydronu na tých vyučovacích hodinách, kde by podľa charakteru učiva bolo možné jeho zaradenie? Odpoveď zdôvodnite.

- Áno, určite. Hodina by bol zaujímavejšia a pútavejšia. Je to skvelá pomôcka na geometriu.
- Samozrejme. Takáto hodina obohatí naše predstavy.
- Áno. Zlepšuje priestorové videnie. Doteraz keď sme na hodinách preberali niečo s telesami, učiteľka vždy iba vysvetľovala, niekedy priniesla aj model telesa, ale vo veľkej triede ten jeden model nestačil.
- Samozrejme. Pri práci s Polydronom sa zapájali do objavovania aj spolužiaci, ktorí inak na hodinách matematiky len pasívne sedia.

3. Bola pre Vás vyučovacia hodina s Polydronom prínosom? Ak áno, odpoveď zdôvodnite.

- Určite áno, pochopil som veľa vecí.
- Naučil som sa stavať telesá, s ktorými som sa predtým nikdy nestretol.
- Naučil som sa mnoho nových vzťahov.

- Myslím si, že som zachytila viac informácií ako na klasickej hodine matematiky.
- Keby nepracujeme so stavebnicou, Eulerovu vetu by som určite neobjavil, pretože tie telesá aj keby som si ťažko predstavil, ešte ťažšie by som v mysli spočítal, koľko majú hrán a vrcholov.
- To sa uvidí na ďalších hodinách matematiky.
- Bolo to zaujímavé, ale nejakým veľkým prínosom nie.

Záver

Zavedenie manipulačnej činnosti so stavebnicou Polydron do výučby nielen zvýšilo motiváciu študentov, ale ako sme sa neskôr dozvedeli od ich vyučujúcej, aj trvácnosť ich poznatkov. Žiaci si pamätali jednotlivé pojmy a vzťahy, a vedeli si ich lepšie predstaviť.

Môžeme skonštatovať, že všetci študenti sa aktívne zapájali do vyučovacieho procesu a použitie stavebnice ich motivovalo pracovať a riešiť zadané úlohy. Z hľadiska časovej náročnosti je potrebné, aby sa s prácou so stavebnicou študenti zoznámili skôr – aj s patentovým spájaním, aj s dielmi stavebnice.

Pre všetkých študentov bola hodina zaujímavá. Za 45 minútovú vyučovaciu hodinu sme stihli v príspevku popísané aktivity. Je na učiteľovi, v akej miere a forme využije túto síce finančne náročnú, ale predsa len dostupnú učebnú pomôcku, ktorú môžeme využiť aj na ďalších hodinách matematiky, napr. pri hľadaní všetkých sietí kocky, pri stavbe kockových telies a hlavolame Soma kocka. Študenti so slabšou priestorovou predstavivosťou si pri niektorých výpočtových úlohách zo stereometrie nevedia predstaviť, prípadne nakresliť plášť telesa. Aj pri riešení takýchto úloh je vhodné využívať stavebnicu Polydron.

LITERATÚRA

[1] Vallo, D. – Záhorská, J. – Ďuriš, V.: *Manipulačná geometria v škole.* In: Nové trendy v matematickom vzdelávaní : zborník vedeckých prác. - Nitra : SPU, 2010. - ISBN 978-80-522-0413-0, S. 153-158.

[2] Príloha 3A. Štátny vzdelávací program ISCED 3. Citované dňa 10. 11. 2011. Dostupná na: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/ vzdelavacie oblasti/ matematika_isced3a.pdf

[3] Žídek, O.: *Polydron verzus Geomag*. In: zborník z medzinárodnej vedeckej konferencie Príprava učiteľov elementaristov v novom storočí, s. 423 – 427, UPJŠ, Prešov, 2002. ISBN 80-8068-146-5

[4] Vankúš, P.: *Didaktické hry vo vyučovaní matematiky*. In: Letná škola z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2009, P-MAT, Bratislava, ISBN s. 92-94. ISBN 978-80-89370-01-6

[5] *Cieľové požiadavky na maturitné skúšky*. Citované dňa 10. 11. 2011. Dostupné na: http://www.statpedu.sk/files/documents/katalog%20cielovych%20poziadaviek/matematika_cp.pdf

RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: kvidermanova@ukf.sk

PaedDr. Alena Viziová, PhD.
Gymnázium Golianova
Golianova 68
SK – 949 01 Nitra
e-mail: alena.viziova@gmail.com

PaedDr. Janka Melušová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: jmelusova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA

METÓDA RIADENÉHO SKÚMANIA A STRAPCE PROBLÉMOV VO VYUČOVANÍ STEREOMETRIE V PROSTREDÍ CABRI 3D

LILLA KOREŇOVÁ

ABSTRACT. One of the tasks of teaching stereometry on high schools is to develop space imagination. By the National Education Program for High Schools (ISCED 3A), students, within the topics of geometry, should explore and discover planar and spatial shapes and objects and their properties, solve metric tasks and in simple cases, they should be able to make planar cross sections. In achieving these goals, it's very effective to use appropriate mathematical software. The goal of this contribution is to point out some of the possibilities of constructivist approach towards teaching planar cross section topics using Cabri 3D.

Úvod

Jednou z úloh vyučovania stereometrie na strednej škole je rozvíjanie priestorovej predstavivosti. Podľa Štátneho vzdelávacieho program pre stredné školy (ISCED 3A) by žiaci mali v tematickom okruhu Geometria a meranie skúmať a objavovať rovinné a priestorové útvary a ich vlastnosti, riešiť polohové a metrické úlohy, mali by vedieť v jednoduchých prípadoch zobraziť rez telesa rovinou. Pri dosahovaní týchto cieľov je veľmi účinné využívať efektívne vyučovacie metódy ako aj vhodný matematický softvér.

Teória konštruktivistického poznávania a učenia sa, ktorú vypracoval švajčiarsky psychológ Jean Piaget vychádza z predpokladu, že žiak v aktívnej interakcii s prostredím postupne konštruuje svoj vnútorný systém poznania. Proces učenia sa by mal prebiehať v podnetnom vzdelávacom prostredí, ktoré inšpiruje žiakov k bádaniu. (Lukáč, S.a kol. 2010)

Pedagogický konštruktivizmus požaduje, aby sa vo výučbe využívalo riešenie konkrétnych životných (autentických) problémov, tvorivé myslenie, práca v skupinách, manipulácia s predmetmi, názorné pomôcky, napríklad interaktívne počítačové programy. (Turek 2010)

Medzi konštruktivistické prístupy vhodné pre vyučovanie stereometrie patrí aj metóda riadeného skúmania, výskumná metóda ako aj metóda vytvárania strapcov problémov.

Metóda vytvárania strapcov problémov spočíva vo vytypovaní vhodného východiskového problému, ktorý budú žiaci spolu s učiteľom riešiť. Následne po vyriešení úvodného problému žiaci riešia podobné problémy, ktoré sa od pôvodného príliš nelíšia a zároveň aj metóda riešenia týchto problémov je rovnaká alebo veľmi podobná metóde riešenia pôvodného problému. Cieľom je po určitom tréningu vtiahnuť do procesu vytvárania nových problémov aj študentov a to tak, aby postupne vytvárali problémy, ktoré sa od pôvodného viac a viac vzďaľujú. (Kopka 2010)

Vhodným podnetným digitálnym vzdelávacím prostredím pre takéto vyučovanie stereometrie je softvér Casbri 3D.

V príspevku prezentujeme námety na vyučovanie stereometrie, konkrétne rezov telies pomocou riadeného skúmania (metódy vytvárania strapcov problémov) v prostredí Cabri 3D.

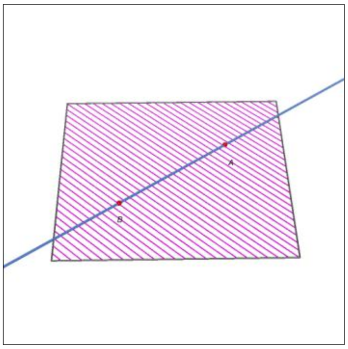
Strapec problémov: Rez kocky rovinou

V úvodnej časti vyučovacej jednotky učiteľ zopakuje nasledujúce tri vety, ktoré budú študenti pri riešení úloh používať. V ideálnom prípade študenti manipulujú s pripravenými Cabri 3D výkresmi na interaktívnej tabuli, v horšom prípade sa použije dataprojektor.

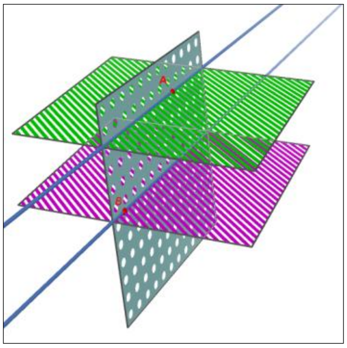
Veta 1: Ak ležia dva rôzne body v rovine, tak nimi priamka určená tiež leží v tejto rovine.

Veta 2: Dve rovnobežné roviny pretína tretia rovina v dvoch rovnobežných priamkach.

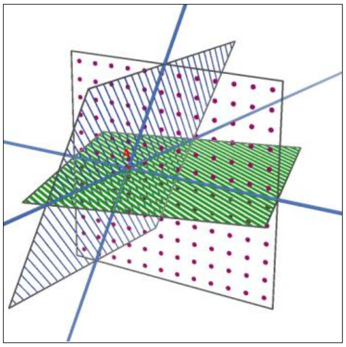
Veta 3: Ak sú každé dve z troch rovín rôznobežné a tieto tri roviny majú jediný spoločný bod, tak týmto spoločným bodom prechádzajú všetky tri priesečnice. (Kopka 2010)



Obrázok 1: Veta 1

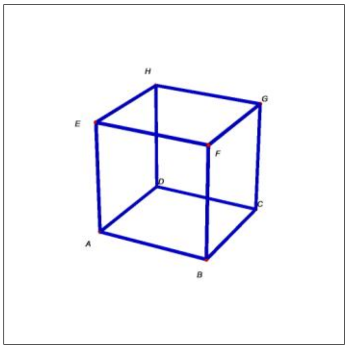


Obrázok 2: Veta 2

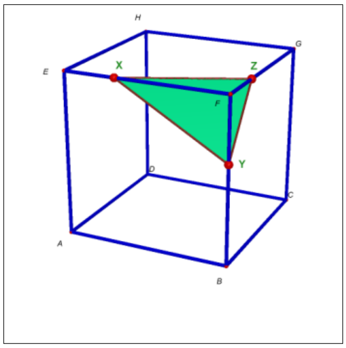


Obrázok 3: Veta 3

Úloha 1: Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou určenou bodmi X, Y, Z ak $X \in EF, Y \in FB, Z \in FG$.
V prostredí Cabri 3D môžeme použiť pripravený výkres s kockou a študenti najprv správne umiestnia body X, Y, Z , potom zostroja rez.



Obrázok 4: cabri výkres s kockou



Obrázok 5: cabri výkres s konštrukciou rezu (úloha 1)

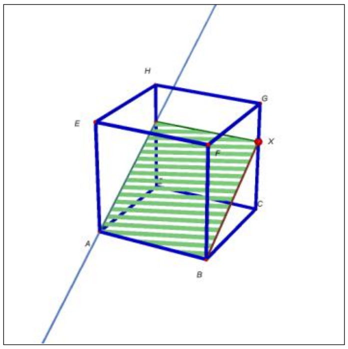
Riešenie: Spojíme body a vytvoríme trojuholník (Veta 1)
Poznámka: riešenia úloh v príspevku len naznačíme, učiteľ so študentmi by odvodil presný postup aj s obvyklým matematickým zápisom.
Digitálne prostredie Cabri 3D umožní študentom otáčať vytvoreným telesom v priestore, čo im pomôže lepšie si predstaviť umiestnenie geometrických útvarov v priestore. Výbornou pomôckou je, ak správne zostrojili body X, Y, Z (ležia na príslušných hranách

kocky), potom študenti môžu experimentovať, skúmať, aký rez môže vzniknúť. Učiteľ môže položiť študentom pomocné otázky, lepšie je však, ak vytvorí atmosféru, kde tieto a podobné gradované otázky vymýšľajú sami študenti:

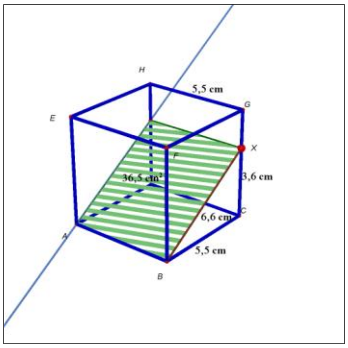
- Aký tvar má rez pri rôznych umiestneniach bodov X, Y a Z (v súlade s podmienkami úlohy)?
- Aké veľkosti strán bude mať trojuholník - rez, ak body budú v strede (v tretine, štvrtine) hrany?
- Kedy bude mať rez najväčší (najmenší obsah)? Ako vypočítam obsah daného rezu, ak poznáme dĺžku hrany kocky číselne (len všeobecne a)?

V Cabri 3D v2 môžu študenti aj merať dĺžku a obsah útvarov, čo umožní okamžité overenie ich hypotéz a výpočtov.

Úloha 2: Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou určenou bodmi *A*, *B*, *X* ak $X \in CG$.
V prostredí Cabri 3D môžeme použiť pripravený výkres s kockou a študenti najprv správne umiestnia bod X a potom zostroja rez.



Obrázok 6: cabri výkres s dynamickou konštrukciou rezu



Obrázok 7: cabri výkres s nameranými hodnotami dĺžok a obsahu rezu

Riešenie: Môžeme použiť dve stratégie – zostrojíme priesečník hrany *DH* a rovnobežky s *BX* cez bod *A* (leží v stene kocky), spojíme body a vytvoríme štvoruholník (Veta 1). Podobne by sme mohli začať rovnobežkou s *AB* cez *X* (tiež Veta 1).

Učiteľ spolu so študentmi môžu riešiť nasledovné úlohy:

- Aký tvar má rez pri rôznych umiestneniach bodu *X* ?
- Aký tvar a aké veľkosti strán bude mať rez, ak bod *X* bude v strede (tretine, štvrtine) hrany?
- Kedy bude mať rez najväčší (najmenší obsah)? Ako vypočítam obsah daného rezu, ak poznáme dĺžku hrany kocky číselne (len všeobecne a)?

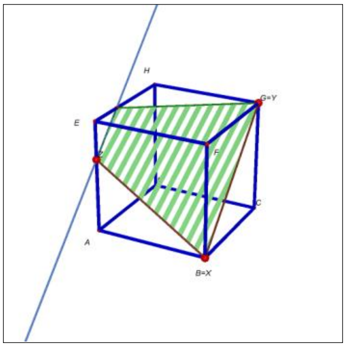
Študenti opäť môžu aj merať dĺžku a obsah útvarov, čo umožní okamžité overenie ich hypotéz a výpočtov.

Úloha 3: Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou určenou bodmi *X*, *Y*, *Z* ak

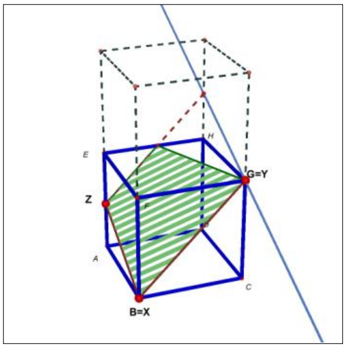
a) $X \equiv B, Y \equiv G, Z \in AE.$
b) $X \in AE, Y \in FB, Z \in CG.$
c) $X \in AE, Y \in AB, Z \in CG.$

Riešenie: Je vhodné, ak študenti nájdu viac spôsobov riešenia úloh.

a)



Obrázok 8: riešenie úlohy 3a



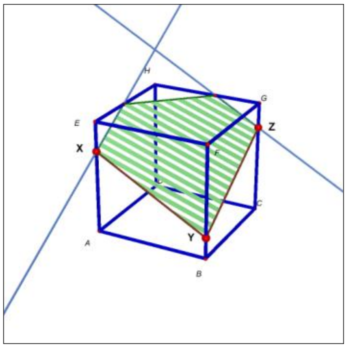
Obrázok 9: iný spôsob riešenia úlohy 3a

Pri riešení úlohy a) môžu študenti využiť trikrát Vetu1 a raz Vetu2, alebo priložíme na kocku ďalšiu pomocnú kocku a tiež použijeme trikrát Vetu1 a raz Vetu2.

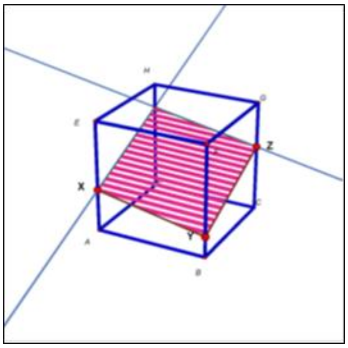
Učiteľ spolu so študentmi môžu riešiť nasledovné úlohy:

- Aký tvar má rez pri rôznych umiestneniach bodu *Z (*ak bod *Z* bude v strede, v tretine, štvrtine hrany) ?
- Kedy bude mať rez najväčší (najmenší obsah)? Ako vypočítam obsah daného rezu, ak poznáme dĺžku hrany kocky a vzdialenosť /*AZ/* číselne (len všeobecne)?

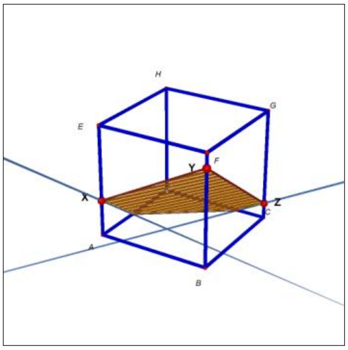
b)



Obrázok 9: riešenie úlohy 3b



Obrázok 10: iné riešenie úlohy 3b



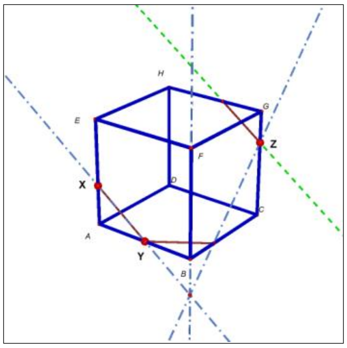
Obrázok 11: iné riešenie úlohy 3b

Učiteľ spolu so študentmi môžu riešiť nasledovné úlohy:

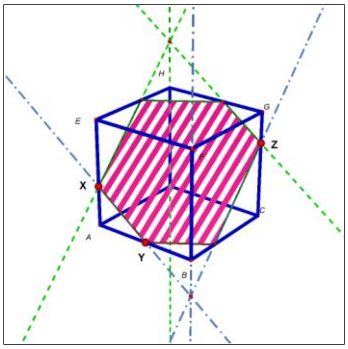
- Aký tvar má rez pri rôznych umiestneniach bodov *X, Y a Z* (v súlade s podmienkami úlohy)?
- Aké veľkosti strán bude mať rez, ak body budú v strede (v tretine, štvrtine) hrany?
- Kedy bude mať rez najväčší (najmenší obsah)?

Na poslednú otázku pravdepodobne študenti strednej školy nebudú vedieť odpovedať na základe matematického výpočtu, ale pomocou experimentovania v Cabri 3D v2 môžu študenti aj merať dĺžku a obsah útvarov, čo umožní experimentálne zistiť odpoveď na poslednú otázku (bez výpočtov a dokazovania).

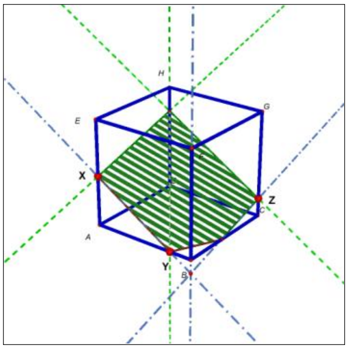
c) Pri riešení úlohy c) využijeme všetky vety (Veta 1, 2 aj 3). Je vhodné, ak študenti nájdu viac možností konštrukcie.



Obrázok 13: začiatok riešenia úlohy 3c



Obrázok 12: riešenie úlohy 3c



Obrázok 14: riešenie úlohy 3c pre iné umiestnenie bodov X, Y, Z

Učiteľ spolu so študentmi môžu riešiť nasledovné úlohy:

- Aký tvar má rez pri rôznych umiestneniach bodov *X, Y a Z* (v súlade s podmienkami úlohy)?
- Aké veľkosti strán bude mať rez, ak body budú v strede (v tretine, štvrtine) hrany?

Študenti môžu riešiť úlohu viacerým spôsobom, je vhodné, ak to navzájom prezentujú napríklad na interaktívnej tabuli.

Záver

Predkladaný strapec problémov sa dá ďalej rozširovať a to niekoľkými smermi: napríklad študenti vytvoria teleso zložením z dvoch, troch kociek a riešia rezy takto vzniknutého telesa. Ďalším rozšírením sú rezy na iných telesách, napríklad ihlanoch. Riešenie týchto strapcov úloh v digitálnom prostredí Cabri 3D je nielen motivujúce pre študentov, ale im umožní aj lepšie rozvíjať ich priestorovú predstavivosť.

Predpokladáme aj rozvoj kľúčových kompetencií, ktoré sú v Štátnom vzdelávacom programe pre stredné školy (ISCED 3A) určené takto:

- kompetencia uplatňovať základ matematického myslenia a základné schopnosti poznávať v oblasti vedy a techniky
- kompetencia používať matematické modely priestorového myslenia a prezentácie
- kompetencia riešiť problémy
- kompetencia využívať IKT pri vzdelávaní.

LITERATÚRA

[1] Dillingerová M.: Rozšírenie poznatkov o mnohostenoch pre žiakov stredných škôl. In: Zborník 5 Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky. KZDM, Bratislava, 2003 ISBN 80-223-1874-4

[2] Kopka, J. Ako riešiť matematické problémy. Ružomberok: Verbum, 2010, ISBN 978-80-8084-563-6

[3] Lukáč, S.a kol. Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete Matematika pre stredné školy. Košice: elfa s. r. o., 2010, ISBN 978-80-8086-149-0

[4] Turek, I. Didaktika. Bratislava: Iura Edition spol s. r. o., 2010, ISBN 978-80-8078-322-8

[5] Uherčíková, V.: Priestorová predstavivosť a jej význam vo vyučovaní matematiky, Zborník z konferencie Matematika v škole dnes a zajtra, Ružomberok, 2005.

[6] http://www.minedu.sk/index.php?lang=sk&rootId=2319

[7] http://www.cabri.com/cabri-3d.html

PaedDr. Lilla Koreňová, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: korenova@fmph.uniba.sk

Zostavovatelia: RNDr. Dušan Vallo, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.

Názov diela: Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky

Vydavateľ: FPV UKF v Nitre
Edícia: Prírodovedec č. 492
Výkonní redaktori: RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Autor obálky: RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Typ publikácie: AFD – Publikované príspevky na domácich vedeckých konferenciách

Rok vydania: 2012
Poradie vydania: prvé
Počet strán: 82
Počet výtlačkov: 55ks

ISBN **978-80-558-0047-9**

9 788055 800479