FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA

KLASIFIKÁCIA ŠTVORSTENOV PODĽA IM OPÍSANÝCH ROVNOBEŽNOSTENOV

DUŠAN VALLO

ABSTRACT. In this article we present a special approach to a classification of various types of tetrahedrons by using the described parallelepipeds.

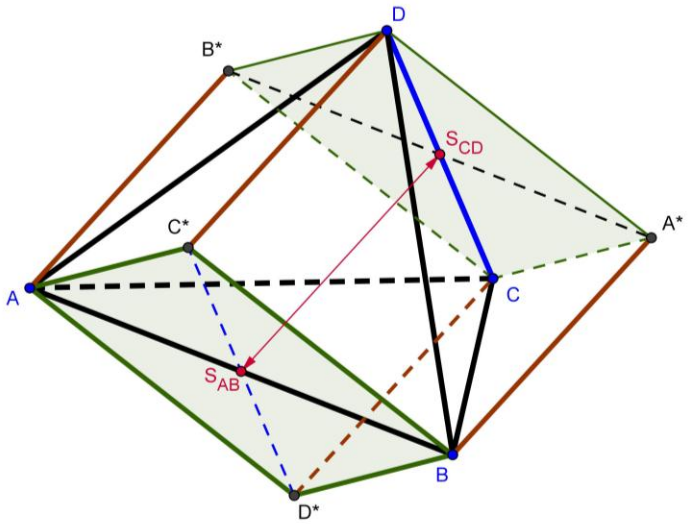
Úvod

Štvorsten patrí k základným priestorovým útvarom, ktorý žiaci väčšinou poznajú pod pojmom trojboký ihlan. V tomto skromnom príspevku sa zameriame na charakterizáciu jednotlivých typov štvorstenov podľa toho, aký rovnobežnosten mu možno opísať. V prvom rade uvedieme konštrukciu rovnobežnostena opísaného štvorstenu. Neskôr na základe nutných a postačujúcich podmienok určujúcich daný štvorsten potom priradíme tomuto telesu odpovedajúci rovnobežnosten.

Rovnobežnosten opísaný štvorstenu

Nasledujúca veta tvrdí, že každému štvorstenu možno opísať rovnobežnosten.

***Veta** 1. Štvorsten možno umiestniť do rovnobežnostena tak, že jeho hrany sú stenovými uhlopriečkami rovnobežnostena.*



Obr. 1

Dôkaz. Uvažujme o štvorstene $ABCD$. Ak označíme stredy protiľahlých hrán AB, CD postupne S_{AB}, S_{CD}, potom v smere vektora $\overrightarrow{S_{CD}S_{AB}}$ posunieme hranu CD a zostrojíme

Príspevok vznikol za podpory grantu KEGA 038UKF – 4/ 2011 s názvom *Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh.*

úsečku C^*D^*. Štvoruholník AD^*BC^* je rovnobežníkom, pretože jeho uhlopriečky AB, C^*D^* sa rozpoľujú.

Ak posunieme hranu AB v smere vektora $-\overrightarrow{S_{CD}S_{AB}}$), potom dostaneme rovnobežník B^*CA^*D, ktorý je zhodný so rovnobežníkom AD^*BC^*.

Dva zhodné a navzájom rôzne rovnobežníky AC^*DB^*, D^*BA^*C v priestore, ktorých odpovedajúce si strany sú rovnobežné, určujú rovnobežnosten $AC^*DB^*D^*BA^*C$.

Poznatok, že štvorstenu možno opísať rovnobežnosten, je dôležitý. Niektoré základné vety o štvorstene ľahko dokážeme, ak použijeme vetu 1. Napríklad:

a) *Stredy úsečiek, ktorých koncové body sú stredmi protiľahlých hrán štvorstena, sú totožné.*

b) *Ťažnice štvorstena sa pretínajú v jednom bode – ťažisku.*

c) *Úsečky určené stredmi protiľahlých hrán štvorstena sa pretínajú v jeho ťažisku.*

Dôkazy nájdeme v [1].

Podľa vety 1 opíšeme každému štvorstenu jednoznačne rovnobežnosten. Prehľad v rovnobežnostenoch môžeme spraviť podľa tabuľky.

<table>
<tr><th colspan="3">Steny</th><th colspan="4">Počty stien</th></tr>
<tr><th></th><th>dolná podstava</th><th>protiľahlé bočné steny</th><th>štvorec</th><th>kosoštvorec</th><th>obdĺžnik</th><th>kosodĺžnik</th></tr>
<tr><td>1.</td><td rowspan="6">štvorec</td><td>štvorce</td><td>6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>2 kosoštvorce
2 štvorce</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>kosoštvorce</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>obdĺžniky</td><td>2</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>2 kosodĺžniky
2 obdĺžniky</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>kosodĺžniky</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7.</td><td rowspan="3">kosoštvorec</td><td>kosoštvorce</td><td>0</td><td>6</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>obdĺžniky</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>kosodĺžniky</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>10.</td><td rowspan="4">obdĺžnik</td><td>2 kosoštvorce
2 kosodĺžniky</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>11.</td><td>obdĺžniky</td><td>0</td><td>0</td><td>6</td><td>0</td></tr>
<tr><td>12.</td><td>2 obdĺžniky
2 kosodĺžniky</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>13.</td><td>kosodĺžniky</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>14.</td><td>kosodĺžnik</td><td>kosodĺžniky</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>6</td></tr>
</table>

Tabuľka rovnobežnostenov

Budeme rozlišovať aj niekoľko typov štvorstenov:

a) **ortogonálny štvorsten –** štvorsten, ktorého dve dvojice výšok sa pretínajú, ale neexistuje spoločný priesečník všetkých štyroch výšok,

b) **ortocentrický štvorsten** – štvorsten, ktorého všetky štyri výšky sa pretínajú v jednom bode nazývanom *ortocentrum*,

c) **rovnostenný štvorsten** – štvorsten, ktorého steny sú navzájom zhodné trojuholníky,

d) **kostrový štvorsten –** štvorsten, ktorému možno vpísať, resp. pripísať, guľovú plochu tak, že sa dotýka priamok, na ktorých ležia hrany daného štvorstena,. Guľovú plochu nazývame *polovpísanou*, resp. *pripísanou*, guľovou plochou štvorstena.

e) **Pravouhlý štvorsten** – štvorsten, ktorého rovinné uhly pri jednom vrchole sú pravé.

Jednotlivé typy štvorstenov charakterizujú nasledujúce vety, ktoré uvádzame bez dôkazov. Čitateľa odkazujeme na [1].

***Veta** 2. Výšky štvorstena $ABCD$ prechádzajúce vrcholmi A, D sú rôznobežné vtedy a len vtedy, keď sú protiľahlé hrany AD, BC na seba kolmé.*

***Veta** 3. Ak má štvorsten dve dvojice kolmých protiľahlých hrán, potom existuje aj tretia dvojica protiľahlých hrán, ktoré sú na seba kolmé.*

***Veta** 4. Protiľahlé hrany rovnostenného štvorstena sú rovnako dlhé.*

***Veta** 5. Štvorsten $ABCD$ má polovpísanú guľovú plocha vtedy a len vtedy, keď platí*

$$|AD| + |BC| = |BD| + |CA| = |CD| + |AB| .$$

***Veta** 6. Guľová plocha, dotýkajúca sa hrán AB, BC, CA štvorstena $ABCD$ a polpriamok DA, DB, DC existuje vtedy a len vtedy, keď platí*

$$\big||AD| - |BC|\big| = \big||BD| - |CA|\big| = \big||CD| - |AB|\big| .$$

Už na prvý pohľad je zrejmé, že **pravidelný štvorsten** je *ortocentrickým*, *rovnostenným*, a aj *kostrovým* štvorstenom (má jednu polovpísanú guľovú plochu a štyri navzájom zhodné pripísané guľové plochy). Určite nie je pravouhlým štvorstenom, keďže rovinné uhly pri každom vrchole majú veľkosť 60°. Pravidelný štvorstena je teda vpísaný do **kocky**. V uvedenej tabuľke je prislúcha riadok č. 1.

Podľa vety 2 platí, že v **ortogonálnom štvorstene** musí byť *práve jeden* pár kolmých protiľahlých hrán. Podľa dôkazu vety 1, vo vhodnom posunutí sa jedna hrana štvorstena zobrazí do stenovej uhlopriečky uvažovaného rovnobežnostena. Z toho dôvodu ortogonálnemu štvorstenu môže byť opísaný rovnobežnosten, ktorý je uvedený v niektorom riadku č. 4, 5, 6, 8, 9 alebo č. 10. Každý z rovnobežnostenov má len dve protiľahlé steny s navzájom kolmými stenovými uhlopriečkami. Ide o steny, ktoré sú štvorcami. prípadne kosoštvorcami.

Naproti tomu **ortocentrický štvorsten** musí byť opísaný rovnobežnostenu, ktorého aspoň štyri steny sú štvorce, prípadne kosoštvorce, resp. ich kombinácia. Vychádzame z viet 2 a 3. Do úvahy tak prichádzajú rovnobežnosteny z riadkov č. 1, 2, 3 a č. 7. Riadku č. 7 zodpovedá teleso nazývané **romboéder**.

Podľa vety 4 sú protiľahlé hrany **rovnostenného štvorstena** rovnakej dĺžky, preto aj stenové uhlopriečky všetkých trojíc protiľahlých stien opísaného rovnobežnostena musia mať rovnakú dĺžku. Uvažujeme teda rovnobežnosteny, ktoré nemajú steny kosoštvorce, prípadne kosodĺžniky. Ide o telesá z riadkov č. 1, 4 a č. 11. Kým riadku č. 1 odpovedá kocka opísaná pravidelnému štvorstenu a riadku č. 4 zodpovedá pravidelný štvorboký hranol, riadku č. 11 zodpovedá **kváder**.

Veta 5, resp. 6, hovorí o nutnej a postačujúcej podmienke pre existenciu **kostrového štvorstena**. Voľná formulácie týchto viet tvrdí, že súčet, resp. rozdiel, dĺžok stenových uhlopriečok je konštantný. Ako sme už uviedli, obom požiadavkám vyhovuje pravidelný štvorsten vpísaný do **kocky** (riadok č. 1). Nie je to však jediný rovnobežnosten, kedy sú obe podmienky splnené. Ide o rovnobežnosten z riadku č. 7, ktorý je **romboéder.**

V oboch prípadoch, kocky a aj romboédru, k vpísanému štvorstenu existuje celkom šesť guľových plôch – jedna opísaná guľová plocha, jedna vpísaná guľová plocha, jedna polovpísaná a 4 pripísané guľové plochy. Je to spôsobené tým, že pri cyklickej zámene vrcholov v závere vety 6 opäť dostávame konštantný rozdiel odpovedajúcich si dĺžok. Nie vždy však existujú všetky 4 pripísané guľové plochy. Existencia niektorých z nich je podmienená konkrétnymi rozmermi uvažovaného rovnobežnostena a nedá sa všeobecne určiť spôsobom, ktorý sme zaviedli v tomto článku.

Zostáva nám ešte určiť rovnobežnosteny, ktoré sú opísané **pravouhlému štvorstenu**. Vzhľadom k tomu, že ľubovoľné protiľahlé hrany tohto štvorstena sú na seba kolmé, je pravouhlý štvorsten aj *ortocentrickým* štvorstenom a problematika je vyriešená s odvolaním sa na vyššie uvedené.

Záver

V príspevku sme sa zamerali na určovanie jednotlivých typov štvorstenov pomocou im opísaných rovnobežnostenov. Uviedli sme základné vlastnosti predmetných štvorstenov a odvolali sme sa na príslušné literárne zdroje. Zo skúseností, ktoré vyplývajú z výučby predmetu s názvom Geometria telies na KM FPV UKF v Nitre, považujme tento prístup ku klasifikácii štvorstenov za vhodný a názorný, nakoľko sa študenti pomerne ľahko a s prehľadom orientujú vo vlastnostiach rovnobežnostenov.

LITERATÚRA

[1] Vallo, D. – Šedivý, O.: *Mnohosteny 1. Cesta k rozvoju geometrických predstáv*, FPV UKF v Nitre, Edícia Prírodovedec č. 418, Nitra, 2010, ISBN: 978-80-8094-735-4, s. 108

[2] Vankúš, P. (2007): *Rozvoj matematických vedomostí žiakov prostredníctvom didaktických hier*, In: Zborník príspevkov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory FMFI UK, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, ISBN 978-80-89186-18-1, s. 77–80.

[3] Vidermanová, K.: *Využitie stavebnice Polydron vo vyučovaní stereometrie*. In. Didaktické hry a aplikačné úlohy vo výučbe matematiky pre 2. st. ZŠ, FPV UKF v Nitre, Edícia Prírodovedec č. 311. Nitra 2008, ISBN: 978-80-8094-346-2, s. 39-42

[4] Vidermanová, K.: *Stereometrické úlohy v certifikovaných meraniach Monitor 9 a Maturita*. In. DiDZa 2008, Nové trendy vo vyučovaní matematiky a informatiky na základných, stredných a vysokých školách. ZU v Žiline 2008, ISBN: 978-80-8070-863-4

[5] Žilková, K.: *C.a.R. zadania – metóda internetových konštrukčných úloh (cvičení).* In. DiDZa 2008, Nové trendy vo vyučovaní matematiky a informatiky na

základných, stredných a vysokých školách. ZU v Žiline 2008, ISBN: 978-80-8070-863-4

[6] Kohanová I., Slavíčková M.: *Development of Pedagogical Content Knowledge in preparation of future mathematics' teachers*, IMEM Congress 2009, Ružomberok: Catholic University, 2009, p. 572-581

[7] Židek, O.: *Špeciálne konvexné mnohosteny a problém vyplňovania priestoru*. In. DiDZa 2008, Nové trendy vo vyučovaní matematiky a informatiky na základných, stredných a vysokých školách. ZU v Žiline 2008, ISBN: 978-80-8070-863-4

[8] Regecová, M. – Slavíčková, M.: *Dynamický softvér v príprave budúcich učiteľov matematiky*. In: Nové trendy v teórii vyučovania matematiky. Dynamický softvér vo vyučovaní. Zborník príspevkov z vedeckého seminára. FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 443, ISBN: 978-80-8094-853-5, s. 46 – 54.

[9] Žilková, K.: *Heuristika v informatizácii výučby matematiky.* Metodicko – pedagogické centrum, 2006. ISB: 80-8052-261-8

RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: dvallo@ukf.sk