

STEREOMETRIA V PRÍPRAVE BUDÚCICH UČITEĽOV MATEMATIKY

MICHAELA REGECOVÁ, MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

ABSTRACT. We present some activities from 3D geometry in this paper. All the activities were implementing into courses for students to be a teacher. On the lessons we use mostly software GeoGebra. Some activities are also very well demonstrating using a modeling mass or other “touchable” model.

Úvod

Spôsob prípravy budúcich učiteľov matematiky sa na každej vysokej škole viac či menej líši, hlavná myšlienka daných študijných programov je však spoločná, a to pripraviť študenta na učiteľskú dráhu ako po odbornej, tak po didaktickej stránke. Na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave je v študijnom pláne odboru Učiteľstvo akademických predmetov v študijnom programe Matematika zaradený predmet Didaktický seminár zo školskej matematiky (DSZŠM), v ktorom je našou snahou rozvíjanie ako odborných predmetových kompetencií študentov, tak i ich pedagogických kompetencií. Venujeme sa tu najmä úlohám zo základoškolskej a stredoškolskej matematiky s dôrazom na matematicky korektné riešenie(a) úlohy a ich analýzu z didaktického hľadiska (rôzne spôsoby riešenia úlohy, dôraz na možné chyby a problémy žiakov...). Vzhľadom na to, že predmet DSZŠM je zostavený v súlade s aktuálnymi štátnymi vzdelávacími programami (teda po obsahovej stránke je zameraný na učivo základných a stredných škôl), jednou z tém, ktorým sa v rámci tohto predmetu venujeme, je i stereometria.

Problematike výučby stereometrie či už syntetickej, alebo analytickej sa venuje viacero prác. Napríklad Regecová sa v [1] venuje možnosti zefektívnenia vyučovania analytickej geometrie na stredných školách využitím nových metód, ako i využitím netradičných úloh. Dôraz na stereometriu kladie vo svojej práci Rumanová [2], ktorá do hĺbky analyzuje riešenie stereometrickej úlohy a úspešnosť jednotlivých stratégií riešenia. Vallo et al. [3] predstavujú niekoľko myšlienok integrácie aktivít zameraných na manipuláciu s modelmi štvorstena vo vyučovaní. Pémová vo svojej dizertačnej práci píše [4]: „*Teoretickým zázemím zobrazovania objektov vo voľnom rovnobežnom premietaní je tzv. veta Pohlkeho-Schwarzova... Oboznámenie sa vyučujúceho aspoň s jej základmi môže prispieť k zefektívneniu jeho práce v procese vyučovania...*“ Vo svojej práci ďalej odsudzuje spôsob výučby stereometrie na stredných školách a ponúka niekoľko postupov, ako sa vyhnúť neželanému stereotypu – práca s rovnobežnostami, hranolmi, ihlanmi a riešenie metrických úloh nie hneď od začiatku na referenčnom modeli. Ako píše vo svojej práci Kohanová [5], vhodným spôsobom (nielen na predmete DSZŠM) sa osvedčila metóda „*problem solving*“. O potrebe inovácie prípravy budúcich učiteľov matematiky píše aj Vankúš v [6], ktorý sa snaží zaviesť do výučby nové postupy a metódy.

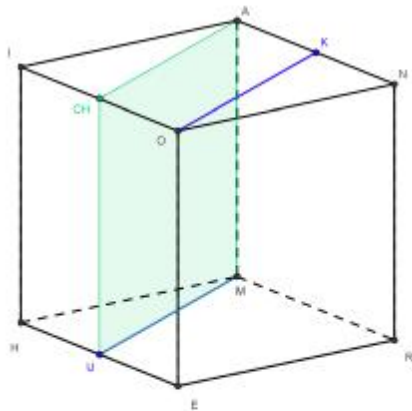
Aj napriek snahe viacerých učiteľov sa výučba stereometrie akoby zúžila na rezy kocky danou rovinou. Túto domnienku potvrdzujú reakcie študentov, ktorí si pod témou stereometria predstavujú predovšetkým „*to, kde robíme rezy kocky*“. V nasledujúcom texte sa pokúsime opísať aktivity, ktoré so študentmi učiteľstva matematiky praktizujeme na DSZŠM pri preberaní stereometrie a jej príbuzných tém.

Voľné rovnobežné premietanie (VRP)

S pojmom VRP sa stretne len niekoľko študentov počas stredoškolského štúdia aj napriek tomu, že ho priamo používajú, aplikujú. Preto sme do predmetu DSZŠM zvlášť zaradili i celok s týmto názvom, aby sa študenti oboznámili, resp. si zopakovali čo to VRP vlastne je, aké vlastnosti sa vo VRP zachovávajú a aké je ich využitie. Úlohy sú zamerané na priradovanie štvor- a päťuholníkov k obrazom štvorca a pravidelného päťuholníka v danom VRP, na zdôvodnenie rovnobežnosti dvoch rovín, prípadne dvoch priamok v priestore. Samotné zobrazovanie objektov z jednej roviny do druhej pomocou daného smeru a obrazu jedného bodu na to nadväzujú. Celok končí rôznymi pohľadmi na trojrozmerné telesá, ich modely v rovine, čím by sme chceli zamedziť spôsobu zobrazovania kocky výlučne v pravom nadhľade. Program GeoGebra je v tomto prípade veľkou pomôckou, prostredníctvom ktorej demonštrujeme, že niektoré pohľady na kocku (rôzne pravé a ľavé podhľady a nadhľady) nám môžu odhaliť niektoré dôležité zákonitosti.

Príklad 1: Body U, K sú po poradí stredy hrán HE a NA kocky HERMIONA. Zdôvodnite, že úsečka UM je rovnobežná s úsečkou OK.

Prístup k riešeniu: Využijeme softvér GeoGebra, ktorý nám umožní najskôr vizuálne sa presvedčiť o rovnobežnosti a následne hľadať argumenty, prečo dané priamky sú rovnobežné (obr.1). Táto úloha je zameraná na zlepšenie argumentácie študentov učiteľstva. Ich argumentácia slovami „veď to vidím“ nie je postačujúca. Možno povedať, že z hľadiska Kuzniakových úrovní geometrického myslenia [7] sú na prvej úrovni – teda „Natural Geometry“ (spôsob argumentácie je pevne spojený s realitou, resp. skúsenosťou).

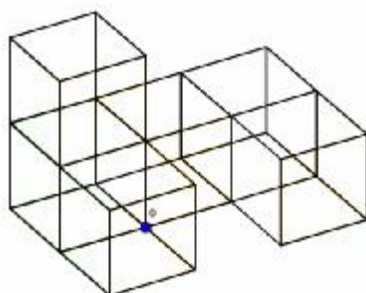


obr. 1: argumentácia rovnobežnosti dvoch priamok

Kockové telesá

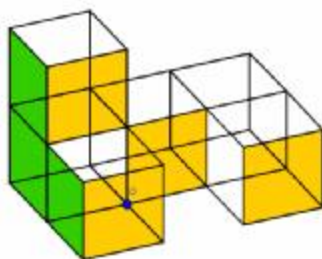
Kockové teleso je také teleso, ktoré vznikne zlepením niekoľkých kociek s rovnakou dĺžkou hrany, pričom je možné navzájom zliepať kocky len celou stenou. Aktivity, s ktorými sa študenti stretnú v rámci predmetu DSZŠM sú zamerané na rozvoj priestorovej predstavivosti a študenti ich môžu priamo využiť i vo svojej budúcej praxi v roli učiteľa na základnej, resp. strednej škole.

Príklad 2: Určte pôdorys, bokorys a nárys kockového telesa znázorneného na obr. 2:

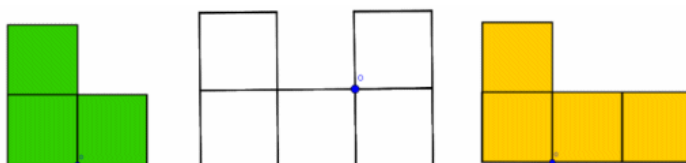


obr. 2: kockové teleso

Prístup k riešeniu: Táto úloha je náročná na priestorovú predstavivosť študentov, keďže teleso je poskladané z viacerých kociek umiestnených v niekoľkých „vrstvách“. Pri riešení je vhodné vizuálne (napr. farebne) najprv odlíšiť jednotlivé steny kociek, ktoré vidíme spredu, z boku a zhora na kompletom telese. V tomto prípade môžu študenti opäť využiť softvér GeoGebra, v ktorom jednotlivé steny vyfarbia (obr. 3). Výsledný bokorys, pôdorys a nárys vidíme na obr.3. Úlohu je samozrejme možné riešiť i pomocou modelov kociek, z ktorých študenti vytvoria kockové teleso a následnou manipuláciou s ním určia bokorys, pôdorys a nárys telesa.

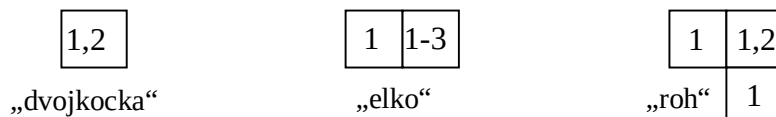


obr. 3: určovanie pôdorysu, bokorysu a nárysu kockového telesa

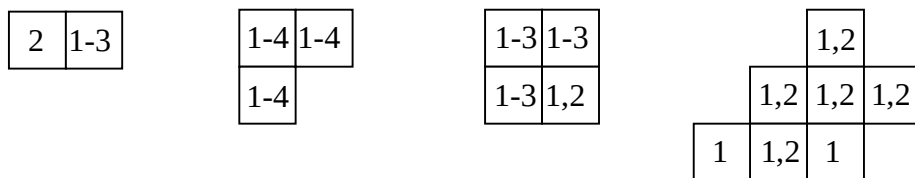


obr. 4: bokorys, pôdorys a nárys kockového telesa

Príklad 3: Máme k dispozícii zakódované kockové telesá znázornené na obr. 5, a to z každého po dva kusy. Ktoré z telies na obr. 6 sa dajú postaviť z uvedených dielov na obr.5? (Netreba použiť všetky.)



obr. 5: kockové telesá



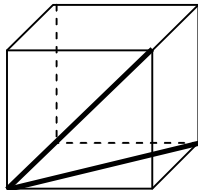
obr. 6: kockové telesá

Prístup k riešeniu: Pre riešenie tejto úlohy je dôležité, aby študenti odhalili spôsob kódovania kockových telies, na základe ktorého môžu následne zostaviť žiadané kockové telesá. Ak majú študenti problém s predstavením si jednotlivých telies, je v tomto prípade vhodné použiť plastelínu. Tá má okrem silnej funkcie názornosti i výhodu priamej manipulácie s objektmi, čo zvyšuje zaujatosť a motiváciu žiakov.

Stereometria

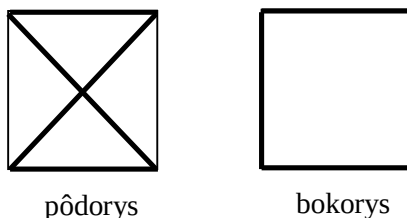
Celok s názvom Stereometria sme rozdelili na niekoľko častí a zaradili do viacerých semestrov štúdia v súlade so špirálovým osnovaním učiva daným Štátnym vzdelávacím programom z roku 2008. Postupne od kódovania zobrazených kockových telies prechádzame cez siete telies ku syntetickému a následne i analytickému riešeniu metrických úloh v kocke alebo ihlane.

Príklad 4: Silvia si znázornila kocku vo voľnom rovnobežnom premietaní. Na obrazy jej stien kreslila úsečky s krajnými bodmi vo vrchoch kocky. Zatiaľ má dve (obr. 7).



obr. 7

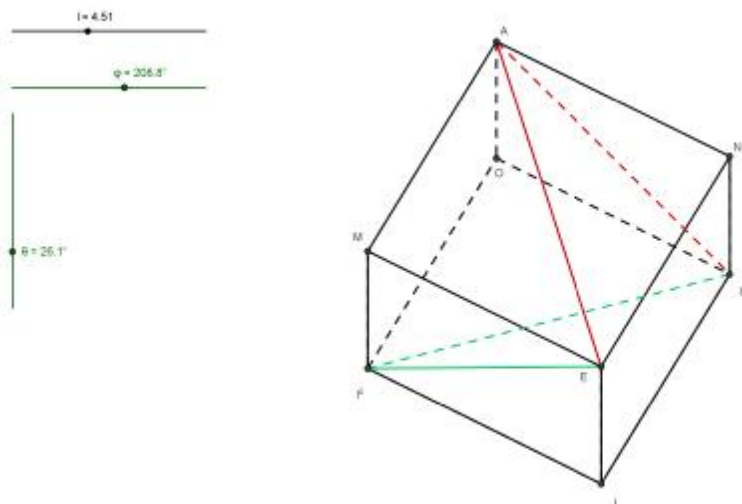
Do jej obrázka dokreslite čo najmenej (čo najviac) takýchto úsečiek tak, aby ste dostali nasledovné dva priemety výslednej čiary (obr.8):



obr. 8

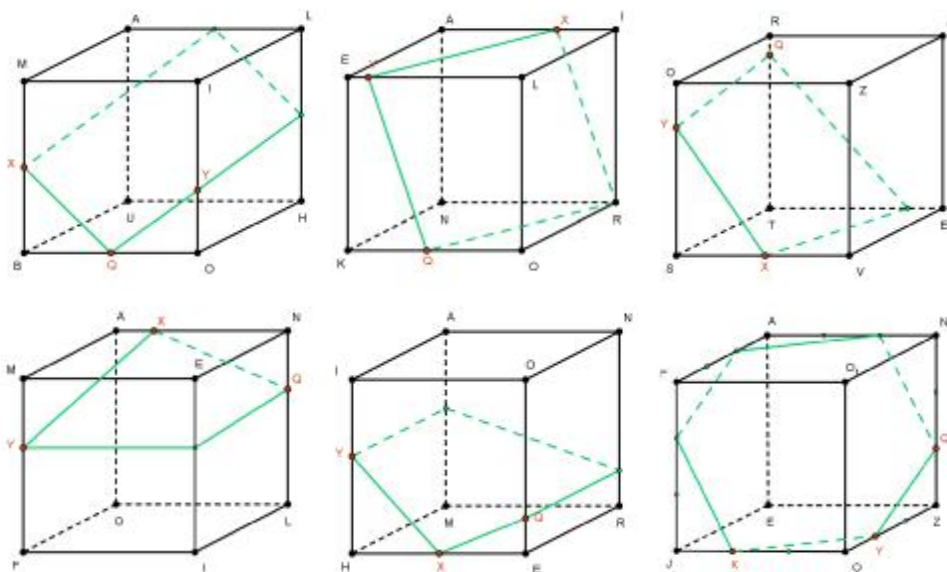
Prístup k riešeniu: Riešenie je možné demonštrovať na modeli kocky zostrojenom v programe GeoGebra, pričom je potrebné zadefinovať rotáciu vodorovnú aj zvislú, aby demonštrácia mala zmysel (obr. 9). Dokresľovaním úsečiek do stien kocky a následná rotácia nám umožní nájsť odpovede na obe otázky, teda koľko minimálne a koľko

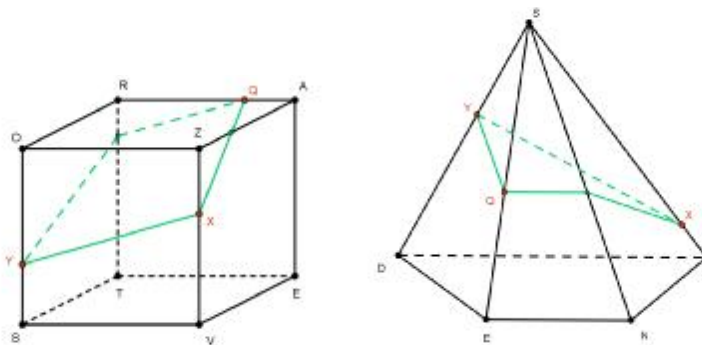
maximálne čiar treba dokresliť, aby sme videli daný pôdorys a bokorys. Toto prostredie je zároveň vhodné i na rozprúdenie diskusie o tom, či tieto dva pohľady sú postačujúce k jednoznačnosti riešenia, resp. či je postačujúce dodanie nárysu na to, aby už riešenie bolo jednoznačné. Vo verzii GeoGebra 3D (zatiaľ len „beta“ verzia, pozri [8]) je 3D prostredie východiskovým nastavením, práca v tejto najnovšie sa vyvíjajúcej verzii bude preto už onedlho vhodnejšia na demonštráciu úloh tohto typu.



obr. 9: jedno z riešení – zelené úsečky boli dané v zadání úlohy, červené úsečky sú dokreslené

Príklad 5: Nájdite chybné rezy daných telies rovinou XYQ (obr. 10) a opravte ich.





obr. 10: hľadanie chybných rezov telies

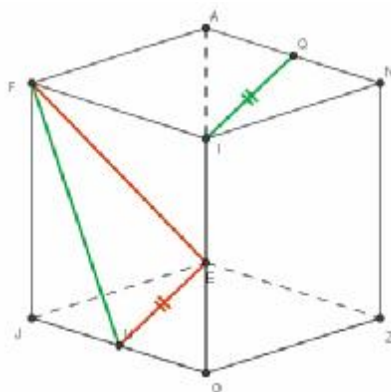
Prístup k riešeniu: Dôraz je na priestorovej predstavivosti, keď sa od študentov očakáva „videnie“ správneho/nesprávneho výsledného rezu danou rovinou, ako i na správnej argumentácii. Teda napr. prečo v jednej stene nemôžu byť dve rôzne úsečky rezu, prečo v niektorých telesách môžeme použiť rovnobežnosť a pod.

Výpočtové úlohy zo stereometrie

Zamerali sme sa na určovanie vzdialenosti bodov, priamok a rovín v priestore, ako i na výpočet veľkostí uhlov dvoch objektov v priestore. Telesá sú pomenované netradične, takže (nielen) študent si musí urobiť náčrt, aby zistil, o aké roviny, priamky, prípadne vrcholy telesa ide.

Príklad 6: Určte veľkosť uhla priamok UF a IQ v kocke JOZEFINA, kde U je stred hrany OJ a Q je stred hrany NA.

Prístup k riešeniu: Opäť môžeme použiť program GeoGebra. Dôležitá vec, ktorú je potrebné si uvedomiť je to, ako určíme uhol mimobežiek. Následne je úloha a jej riešenie triviálne (obr. 11).

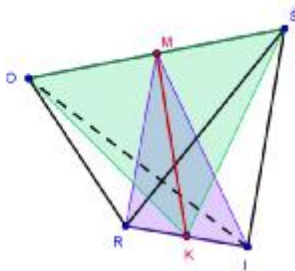


obr. 11: uhol mimobežiek UF a IQ

Príklad 7: Určte vzdialenosť protíahlých hrán pravidelného štvorstena RIŠO s dĺžkou hrany $a = \sqrt{2}$.

Prístup k riešeniu: Podobne ako v predchádzajúcej úlohe, i v tomto prípade je potrebné, aby študenti vedeli, čo sa pod pojmom vzdialenosť dvoch mimobežiek rozumie.

Nasledovne stačí, aby našli priečku mimobežiek (napr. priečka mimobežiek RI a ŠO je úsečka MK) a zo vzniknutých trojuholníkov vypočítali jej veľkosť (v našom prípade môžeme veľkosť úsečky MK vypočítať napr. z trojuholníka ŠOK, pričom jej veľkosť je 1; pozri obr. 12). V tejto úlohe je okrem práce s mimobežnými útvarmi, ktorá je sama o sebe náročná na predstavivosť, obtiažna i manipulácia so štvorstenom. Ako pomocný nástroj sme teda opäť použili softvér GeoGebra, ktorý umožňuje rotáciu telies, a tým i zvyšuje viditeľnosť vzťahov medzi jednotlivými objektmi v telese.



obr. 12: vzdialenosť mimobežiek RŠ a OI

Záver

V práci sme sa snažili demonštrovať niekoľko vybraných aktivít zo stereometrie, s ktorými sa stretnú študenti učiteľstva matematiky na FMFI UK v Bratislave. Okrem obsahovej náplne sme sa v článku zamerali i na metódy a formy práce so študentmi v priebehu sprístupňovania témy stereometria. Keďže sa snažíme, aby študenti použili nielen svoje znalosti z matematiky, ale aj jej didaktiky, našim cieľom je rozvíjať u študentov, budúcich učiteľov matematiky, predovšetkým tzv. „Pedagogical-content knowledge (PCK)“. Ako vo svojej práci píše Kohanová&Slavíčková [9], na túto zložku prípravy budúcich učiteľov (nielen) matematiky sa zabúda. Pritom stále platí, že učiteľ je dobrým učiteľom vtedy, ak je odborníkom vo svojom odbore a má dobré didaktické schopnosti, teda má PCK na vysokej úrovni. Rozvíjanie PCK je cieľom aj už spomínaného predmetu Didaktický seminár zo školskej matematiky, ktorý sme v článku stručne predstavili.

LITERATÚRA

- [1] Regecová, M.: *Teaching of analytic geometry and vector calculus and proposals of problems' solutions*, Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics, Issue 5, Comenius University in Bratislava, Comenius University Press, 2005, ISBN 80-223-2137-0
- [2] Rumanová, L.: *Vedia študenti aplikovať nadobudnuté vedomosti pri riešení stereometrického problému?* Zborník bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky, Univerzita Komenského v Bratislave, PACI Computer Studio Bratislava, 2004, ISBN 80-223-1833-7
- [3] Vallo, D., Záhorská, J., Ďuriš, V.: *Objavujeme sieť štvorstena*. Acta mathematica, Vol. 14, Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, 2011
- [4] Pémová M.: *Utváranie interných kompetencií v stereometrii*. Dizertačná práca. Bratislava, 2008.

- [5] Kohanová I.: *Metóda problem solving v príprave budúcich učiteľov matematiky*, Acta Mathematica, Vol. 13, Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, 2010, p. 127-132
- [6] Vankúš P.: *Inovatívne pedagogické prístupy v príprave budúcich učiteľov matematiky*, Zborník príspevkov z III. Odbornej konferencie s medzinárodnou účasťou Quo vadis vzdelávanie k vede a technike na stredných školách, Bratislava, Mladí vedci Slovenska, 2010, ISBN 978-80-970496-4-5, s. 78-81
- [7] Houdement, C., Kuzniak, A.: *Elementary geometry split into different geometrical paradigms*. Proceeding of CERME 3. Bellaria: Italy, 2003
- [8] GeoGebra 3D. In: *International GeoGebra Institute*. [online]. 2011 [cit. 2011-10-31]. Dostupné na internete: <http://www.geogebra.org/trac/wiki/GeoGebra3D>
- [9] Kohanová, I., Slavičková, M.: *Development of Pedagogical Content Knowledge in preparation of future mathematics' teachers*, IMEM Congress 2009, Ružomberok: Catholic University, 2009, s. 572-581

PaedDr. Michaela Regecová, PhD.
PaedDr. Mária Slavičková, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: regecova@fmph.uniba.sk
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk