

## SIETE KOCKY – AKÉ A KOĽKO?

DUŠAN VALLO – ONDREJ ŠEDIVÝ

**ABSTRACT.** In this article we present a genesis of the cube nets by using the handling activity by models of squares. We are concerned with some combinatoric strategy how to find all cube nets.

### Úvod

Príspevok má didaktický charakter a pokúsime sa v ňom pomocou určenia všetkých možností analyzovať siete kocky. Podľa [1] za **sieť**  $n$ -stena považujeme množinu mnohoúhelníkov zhodných s jeho stenami, ktoré sú vhodne umiestnené v rovine tak, že ich zložením dostaneme hranicu  $n$ -stena.

Treba poznamenať, že ide o „intuitívne“ zavedenie pojmu siete, nakoľko nie je exaktne vymedzené, čo rozumieme pod slovným spojením „*vhodne umiestnené v rovine*“, ako aj nie je jasné, čo sa myslí pod „*zložením*“.

Učitelia matematiky na základnej škole často do výučby stereometrického učiva zaraďujú aj známu manipulačnú – experimentálnu aktivitu akou je vytvorenie modelu siete z telesa z papiera. V tejto súvislosti náš príspevok nadväzuje na uvedenú aktivitu, pričom ponúka učiteľom zopár námetov na tvorbu rôznych sietí kocky.

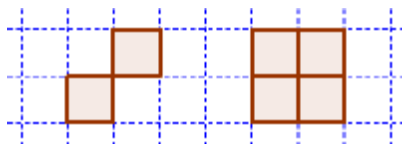
Upozorňujeme, že v článku používame mnohé vyjadrenia, ktoré nie sú exaktne matematické, avšak pomerne výstižne popisujú podstatu zdôraznenej manipulačnej činnosti, ktorá môže byť sprevádzaná konkrétnou manipuláciou s papierovými modelmi štvorcov, resp. inými vhodnými stavebnicovými dielikmi.

### Štvorcová mriežka a jednotkové štvorce

V rovine si zostrojíme štvorcovú mriežku. Do tejto mriežky budeme vhodne umiestňovať *jednotkové* štvorce tak, že:

- vrcholy štvorcov sú mrežovými bodmi,
- vybrané dvojice štvorcov majú spoločnú stranu.

Na obr. 1. sú naznačené „uloženia“ štvorcov (útvary), ktorými sa nebudeme zaoberať. Dôvod je jednoduchý. Nie je možné útvary považovať za sieť kocky.

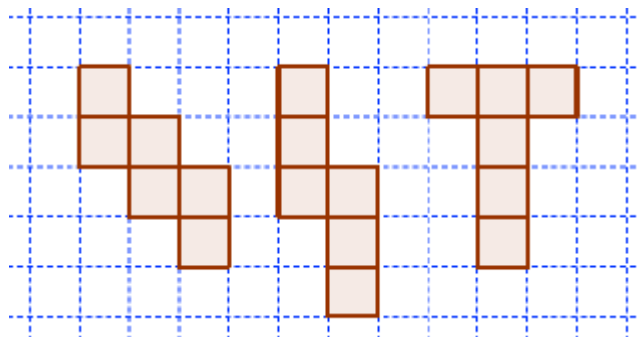


Obr. 1

Kvôli jednoduchšiemu skúmaniu možných sietí kocky zavedieme nasledovne označenie. Ak na sieti kocky identifikujeme obdĺžnik, ktorého rozmery sú v pomere 4:1, povieme, že pôjde o *sieť dĺžky štyri*. Ak na sieti existuje obdĺžnik s pomerom dĺžok strán 3:1 a na tej

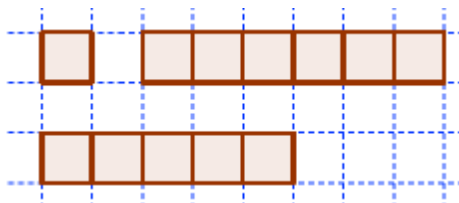
iste siete už neexistuje väčší obdĺžnik, povieme, že *sieť* má *dĺžku tri*. Obdobne sa určuje *sieť* kocky *dĺžky dva*.

Na obr. 2 sú naznačené siete kocky postupne dĺžok 2,3 a 4. Vidíme, že za dĺžku siete kocky považujeme *maximum* z dĺžok strán obdĺžnikov, ktoré existujú na danej sieti.



Obr. 2

Z logických dôvodov nemá zmysel uvažovať o dĺžkach 1 (samostatné štvorce). Obdĺžniky s pomerom dĺžok strán 5:1, resp. 6:1, tiež nie sú sieťami kocky.



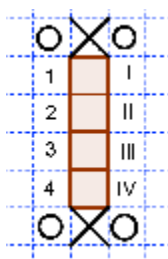
Obr. 3

## Siete kocky dĺžky 4

Začneme so sieťami kocky dĺžky 4, pretože sú najjednoduchšie.

Zostrojíme obdĺžnik s pomerom dĺžok strán 4:1, ktorý rozdelíme na štyri navzájom zhodné štvorce. Umiestnime obdĺžnik do štvorcovej mriežky a označíme si „voľné pozície“ tak, ako je na obr. 4.

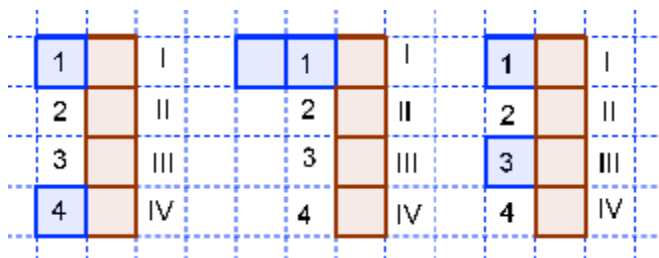
*Poznámka.* Umiestnením ďalšieho štvorca do pozície označenej krížikom dostaneme obdĺžnik s pomerom dĺžok strán 5:1, čo nie je vhodné. Pozície označené krúžkom sú také, ktoré vylučujú umiestnenie štvorca, pretože by štvorce boli incidentné len s jedným vrcholom. Ostatné pozície po „ľavej strane“ daného obdĺžnika sme označili postupne arabskými číslicami 1,2,3 a 4; po „strane pravej“ zase rímskymi číslicami ako I, II, III a IV.



Obr. 4

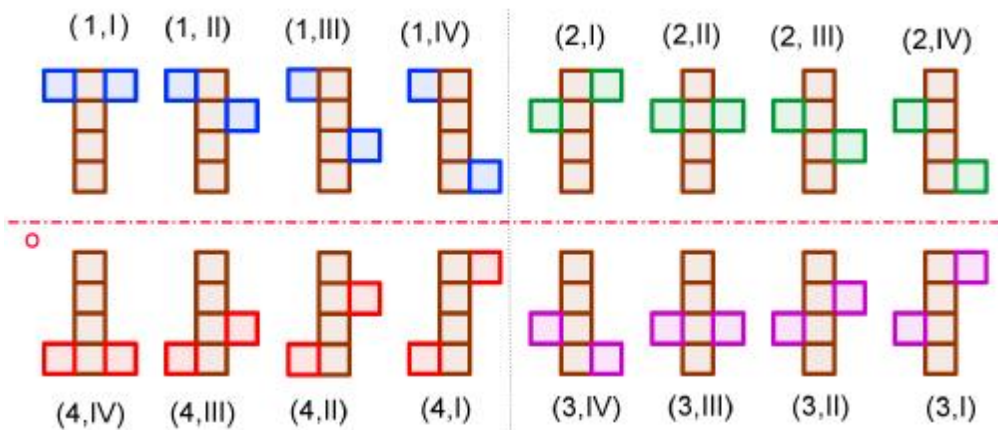
Je zrejmé, že daný obdĺžnik musíme doplniť ešte dvomi štvorcami. To môžeme urobiť dvomi spôsobmi:

- a) oba štvorce umiestnime „vľavo“, resp. „vpravo“. Niektoré možnosti sú naznačené na obr. 5. Vo všetkých 20-tich prípadoch nejde o sieť kocky.



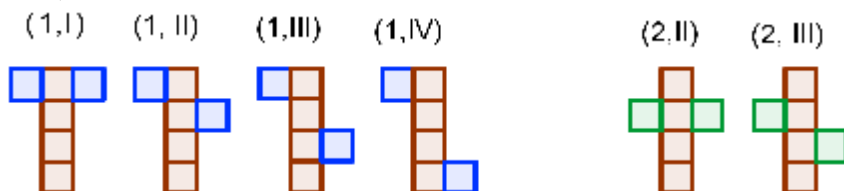
Obr. 5

- b) Štvorce „uložíme“ tak, že jeden umiestnime „vľavo“ a druhý „vpravo“. Máme 16 možností. Týchto 16 variácií popíšeme ako usporiadané dvojice, v ktorých prvá zložka je určená arabskou číslicou 1,2,3 alebo 4; druhá zložka zase rímskou číslicou I, II, III, IV. Každý osemuholník je sieťou kocky. Vylúčime útvary, ktoré sú navzájom zhodné.



Obr. 6

Z obr. 6 je vidno vzťah osovej súmernosti medzi osemuholníkmi. Neuvažujeme teda útvary z „dolného“ riadku. Útvary  $(1,I)$ ,  $(1,II)$ ,  $(1,III)$ ,  $(1,IV)$  sú štyri navzájom rôzne siete kocky a za totožné siete kocky považujeme osemuholníky  $(1,II) \equiv (2,I)$ ,  $(1,III) \equiv (2,IV)$ . **Existuje 6 sietí kocky dĺžky 4.**

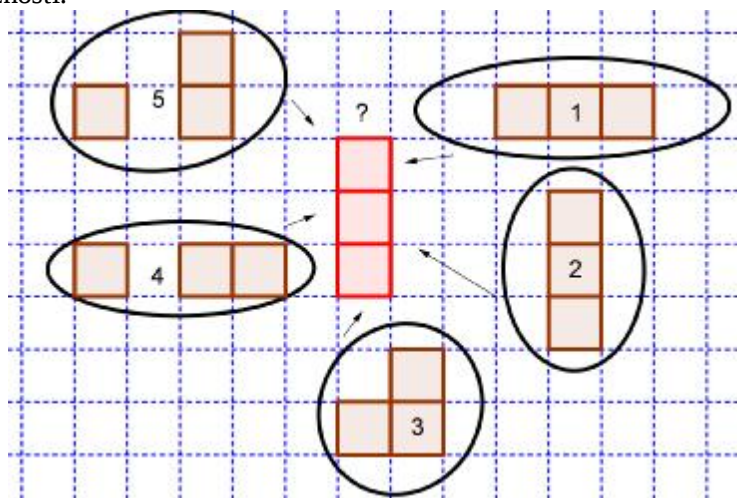


Obr. 7

*Poznámka. V ďalšom texte budeme navzájom zhodné útvary ako potenciálne siete kocky vynechávať.*

### Siete kocky dĺžky 3

So sieťami dĺžky 3 je situácia komplikovanejšia. Začneme „základným“ obdĺžnikom s pomerom dĺžok strán 3:1. Zvyšné 3 štvorce možno usporiadať do útvarov na symbolickom obr. 8, čím máme 5 hlavných množín s možnosťami ako doplniť „základný“ obdĺžnik na potenciálnu sieť kocky. Preveríme jednotlivé možnosti.

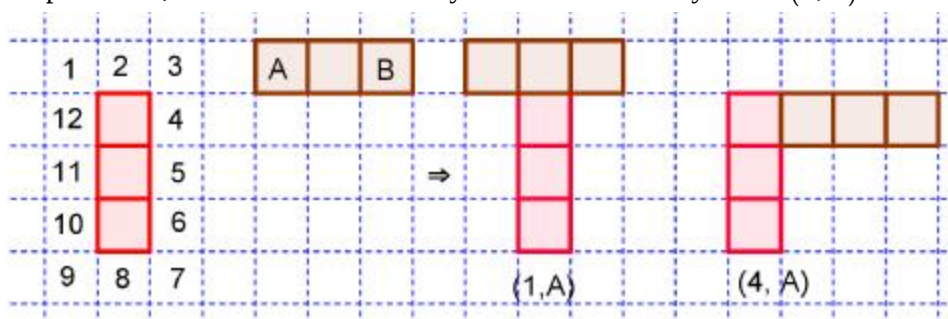


Obr. 8

### Analýzujeme jednotlivé možnosti

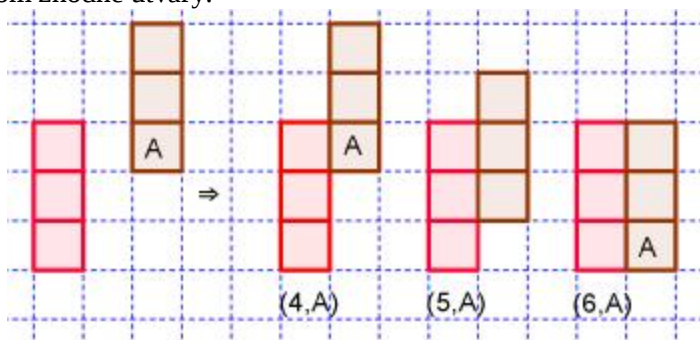
1. V mriežke označíme jednotlivé „voľné“ pozície číslami 1, 2, ..., 12 a „základný“ obdĺžnik nebudeme posúvať. Vhodným posunutím druhého obdĺžnika dostávame útvary, ktorých dĺžka je 4. Ak sú medzi nimi siete kocky, potom sme ich našli v predchádzajúcich úvahách a teda ďalej s týmito možnosťami *neuvažujeme*.

Na obr. 9 sme na ukážku vhodne posunuli obdĺžnik so štvorcami označeným ako A na pozície 1 a 4. Je zrejmé, že vhodným posunutím obdĺžnika tak, že štvorec označený ako B bude na pozícii 12, dostaneme útvar zhodný s útvarom označeným ako (4, A) atď.



Obr. 9

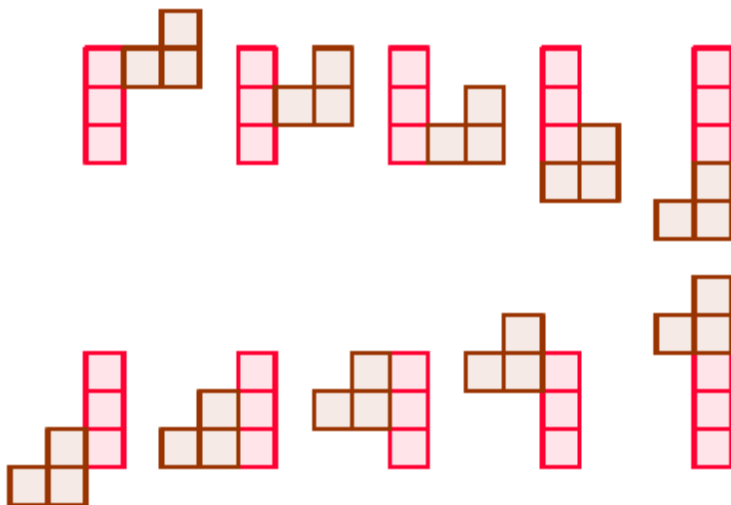
2. Vhodným posunutím druhého obdĺžnika dostaneme nasledovné možnosti, z ktorých sme vylúčili navzájom zhodné útvary.



Obr.10

**Siedmou sieťou kocky** dĺžky 3 je iba útvar označený ako  $(4, A)$ . Ako sme uviedli úvodom, možnosti  $(5, A), (6, A)$  nemôžu byť sieťami kocky.

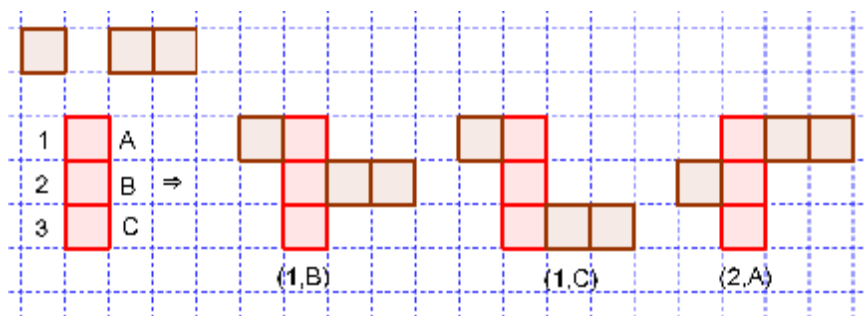
3. Vhodnými posunutiami nekonvexného šesťuholníka z tretej množiny dostaneme tieto útvary, z ktorých žiadny nie je sieťou kocky.



Obr.11

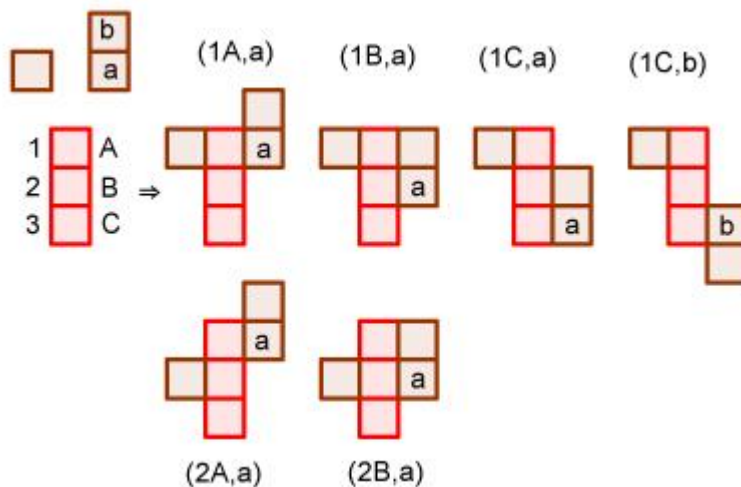
4. Označíme jednotlivé „voľné pozície“ tak, ako je naznačené obr. 12. Z možností  $(1, A), (2, B)$  a  $(3, C)$  dostávame potenciálne siete kocky dĺžky 4, čo sme už uvažovali. Tie teraz neberieme do úvahy.

Vynechaním navzájom zhodných útvarov dostávame len tri možnosti na obr. 12, z ktorých **ôsmou sieťou kocky** dĺžky 3 je iba desaťuholník  $(1, B)$ .



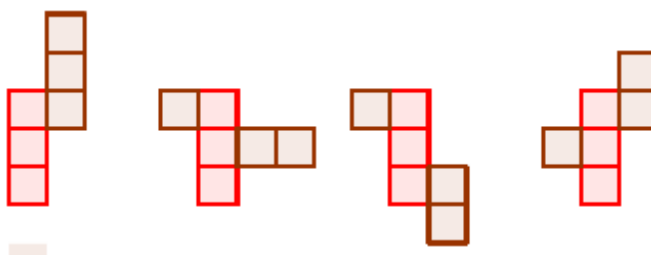
Obr.12

5. Označíme jednotlivé „voľné pozície“ a zavedieme pomocné doplnkové označenie  $a$ ,  $b$  podľa obr. 13. Vynechaním navzájom zhodných útvarov dostávame možnosti, z ktorých sú siete kocky  $(1A,a)$ ,  $(1C,b)$ ,  $(2A,a)$ . Útvar  $(1A,a)$  je však zhodný s desaťuholníkom  $(1,B)$  z predchádzajúceho prípadu. Zostali nám teda len **dve ďalšie siete kocky dĺžky 3** označené ako  $(1C,b)$ ,  $(2A,a)$ .



Obr.13

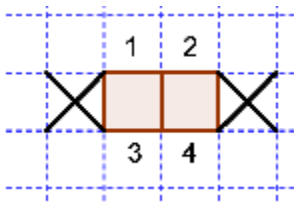
Záverom konštatujeme, že **existujú štyri** siete kocky dĺžky 3, ktoré sú na obr. 14.



Obr.14

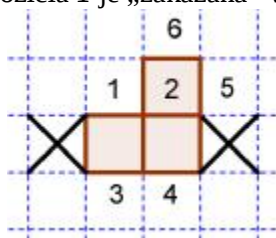
## Siete kocky dĺžky 2

Konštrukcia siete kocky dĺžky dva, je jednoduchá. Začneme s obdĺžnikom, ktorého pomer dĺžok strán je 2:1. Umiestnením štvorca do niektorej z pozícií označenej krížikom (obr. 15) dostaneme potenciálnu sieť dĺžky 3. Do úvahy tak prichádza iba jedna z pozícií označených ako 1,2,3 alebo 4.



Obr.15

Ak zvolíme možnosť 2, ďalší štvorec môžeme pridať len do pozície 5, pretože v pozícii 6 by sme dostali „sieť“ dĺžky 3 a pozícia 1 je „zakázaná“ v úvode.



Obr.16

Obdobná situácia je v aj nasledujúcich krokoch. Jediná možnosť, kam môžeme doplniť ďalší štvorec, je do pozície 7 a nakoniec do pozície 9 ako vidno na obr. 17.



Obr.17

Útvar na obr. 17 je **jedenástou** sieťou kocky a ide o jedinú sieť dĺžky 2.

## Záver

V príspevku sme sa zamerali na genézu tvorby sietí kocky. Zvolili sme konštruktívno - kombinatorický prístup k problematike, keď sme analyzovali jednotlivé možnosti. Zaviedli sme pomocný pojem dĺžky siete kocky a dospeli k záveru, že existuje 11 navzájom rôznych sietí kocky, ktoré sú dĺžok 4, 3 a 2.

## LITERATÚRA

- [1] Medek, V. a kol.: *Matematická terminológia*, SPN Bratislava, 1975

- [2] Vankúš, P. (2007): *Rozvoj matematických vedomostí žiakov prostredníctvom didaktických hier*, In: Zborník príspevkov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043 Centrum projektovej podpory FMFI UK, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, ISBN 978-80-89186-18-1, s. 77–80.
- [3] Vallo, D. – Šedivý, O.: *Mnohosteny. Cesta k rozvoju geometrických predstáv*. FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 418, Nitra, 2010. ISBN: 978-80-8094-735-4, s. 108
- [4] Vankúš, P. (2006): *Didaktická hra vo vyučovaní matematiky*, In: *Matematika v škole dnes a zajtra*, Ružomberok, Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity, ISBN 80-8084-066-0, s. 283–286.
- [5] Kohanová I.: *Metóda problem solving v príprave budúcich učiteľov matematiky*, Acta Mathematica, Vol. 13, Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, 2010, p. 127-132
- [6] Kohanová I., Slavíčková M.: *Development of Pedagogical Content Knowledge in preparation of future mathematics' teachers*, IMEM Congress 2009, Ružomberok: Catholic University, 2009, p. 572-581
- [7] Gay, D. *Geometry by Discovery*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998, ISBN: 0-471-04177-7, p. 410
- [8] Regecová, M. – Slavíčková, M.: *Dynamický softvér v príprave budúcich učiteľov matematiky*. In: *Nové trendy v teórii vyučovania matematiky*. Dynamický softvér vo vyučovaní. Zborník príspevkov z vedeckého seminára. FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec č. 443, ISBN: 978-80-8094-853-5, s. 46 – 54.

prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.

RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Katedra matematiky

Fakulta prírodných vied

Univerzita Konštantína Filozofa

Trieda A. Hlinku 1

SK – 949 01 Nitra

e-mail: [osedivy@ukf.sk](mailto:osedivy@ukf.sk), [dvallo@ukf.sk](mailto:dvallo@ukf.sk)