FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA

UKÁŽKA URČENIA MNOŽINY VŠETKÝCH BODOV DANEJ VLASTNOSTI V PRIESTORE

ONDREJ ŠEDIVÝ – DUŠAN VALLO

ABSTRACT. In this article we present solutions few specific tasks which are concerned with geometric loci of points.

Úvod

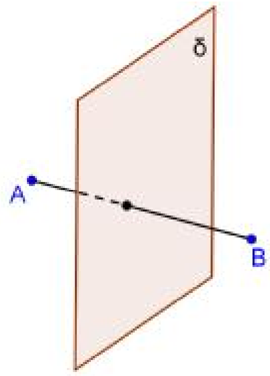
Množinou všetkých bodov danej vlastnosti (geometrické miesto bodov danej vlastnosti) je geometrický útvar U, ktorého body spĺňajú tieto dve požiadavky:

a) Každý bod útvaru U má predpísanú vlastnosť.
b) Každý bod, ktorý má predpísanú vlastnosť, je bodom útvaru U.

Uvedené dve požiadavky vyjadrujú rovnosť dvoch množín: množiny M bodov danej vlastnosti a množiny bodov útvaru U. Dôkazom rovnosti $\mathrm{M} = \mathrm{U}$ potvrdzujeme tvrdenie, že ide o množinu všetkých bodov danej vlastnosti.

Uveďme najdôležitejšie množiny všetkých bodov danej vlastnosti:

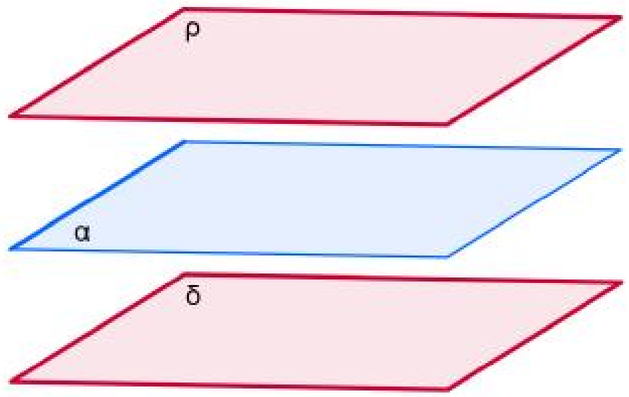
1. Množina všetkých bodov v priestore, ktoré majú od daného bodu S danú vzdialenosť r, je guľová plocha so stredom S a polomerom r, $G[S,r]$.
2. Množina všetkých bodov v priestore rovnako vzdialených od dvoch daných bodov A, B je rovinou súmernosti týchto bodov, t.j. rovina prechádzajúca stredom úsečky AB kolmo na túto úsečku.



Obr. 1

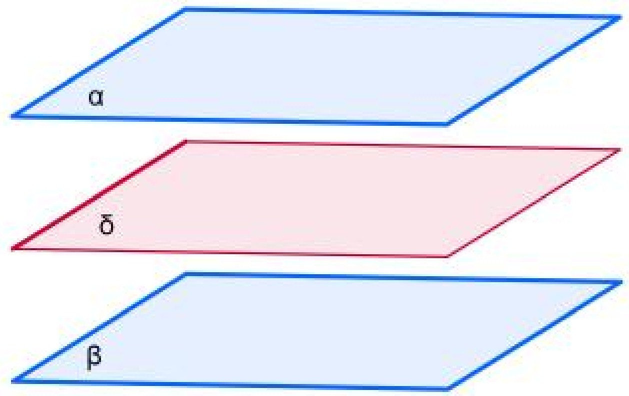
3. Množina všetkých bodov v priestore, ktoré majú od danej roviny a danú vzdialenosť v, sú dve roviny r, d rovnobežné s danou rovinou a vo vzdialenosti v.

Príspevok vznikol za podpory grantu KEGA 038UKF – 4/ 2011 s názvom *Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh.*



Obr. 2

4. Množina všetkých bodov v priestore, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch rovnobežných rovín a, b je rovina d s danými rovinami rovnobežná a je rovinou súmernosti daných dvoch rovín.



Obr. 3

Ukážky úloh

Úloha 1

Určte v priestore množinu všetkých bodov rovnako vzdialených od troch daných bodov A, B, C, ktoré neležia na jednej priamke.

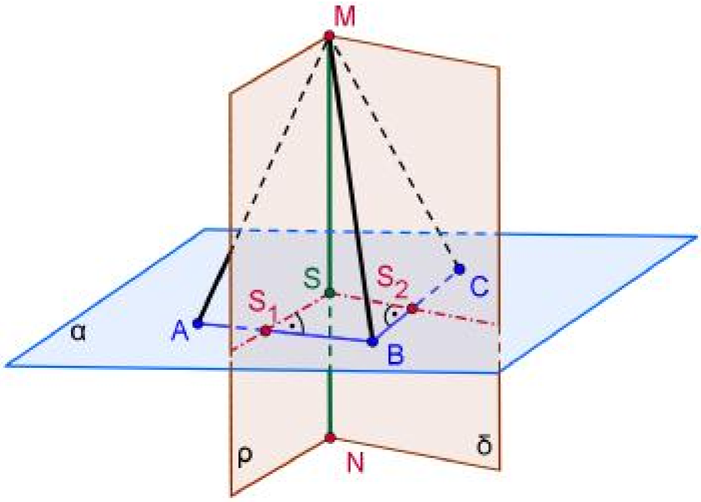
Riešenie.

1. Množina všetkých bodov v priestore, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodov A, B je rovina r, idúca stredom S_1 úsečky AB kolmo na úsečku AB.
2. Množina všetkých bodov v priestore, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodov B, C je rovina d, idúca stredom S_2 úsečky BC kolmo na úsečku BC.
3. Body priesečnice MN rovín r a d majú rovnakú vzdialenosť od bodov A, B, C; ich priesečník S s rovinou trojuholníka ABC je preto stredom kružnice tomu trojuholníku opísanej.

4. Priamka MN je kolmá na rovinu trojuholníka ABC, pretože $AB \perp r$ je $AB \perp MN$, ďalej $BC \perp d$, je $BC \perp MN$, priamky AB, BC sú rôznobežné priamky roviny $\overleftrightarrow{ABC}$.
5. Obrátene, ak bod M je ľubovoľný bod kolmice MN, potom bod M patrí hľadanej množine bodov, pretože $|SA| = |SB| = |SC|$ a pomocou Pytagorovej vety ľahko dokážeme, že $|MA| = |MB| = |MC|$.

Záver.

Množina všetkých bodov v priestore, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od troch daných bodov je priamka zostrojená stredom kružnice prechádzajúcej tromi danými bodmi, kolmo na rovinu tými bodmi určenej.



Obr. 4

Úloha 2

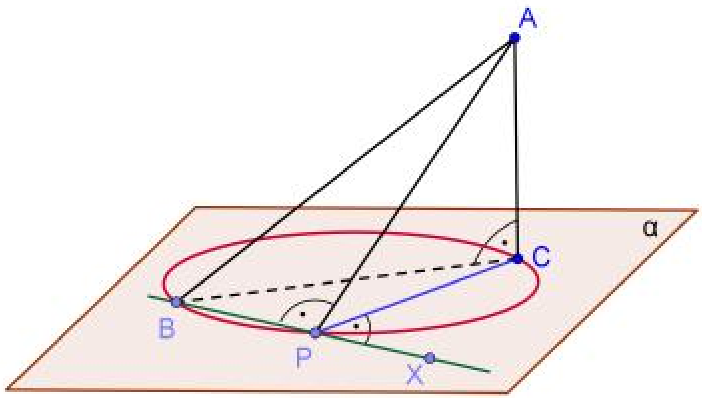
Je daná rovina a, v nej bod B a mimo nej bod A. Určte množinu všetkých piat kolmíc zostrojených z bodu A na všetky priamky ležiace v rovine a idúce bodom B.

Riešenie.

1. Zostrojme bod C, ktorý je pätou kolmice vedenej bodom A na rovinu a.
2. Na ľubovoľnú priamku BX prechádzajúcu bodom B zostrojíme kolmicu z bodu A, jej pätu označíme P; teda $AP \perp BX$.
3. Bod P je bodom hľadanej množiny bodov.
4. Priamka AC je kolmá na rovinu a, potom je kolmá na každú priamku roviny a, teda aj na priamku BX, teda $AC \perp BX$.
5. Pretože sme zostrojili $AP \perp BX$, je priamka BX kolmá na dve rôznobežky AC, AP roviny $\overleftrightarrow{ACP}$, a preto je $BX \perp \overleftrightarrow{ACP}$, potom je aj $BX \perp PC$, čiže $|\sphericalangle BPC| = 90^\circ$.
6. Podľa Tálesovej vety bod P je bodom kružnice, ktorej priemer je BC.

Záver

Množina piat kolmíc zostrojených z bodu A na všetky priamky prechádzajúce v rovine a bodom B je kružnicou zostrojená v rovine a nad priemerom BC.



Obr. 5

Metodická poznámka

Množina všetkých bodov danej vlastnosti je spredmetnenie vlastnosti, teda vlastnosť geometrických objektov je nahradená množinou všetkých bodov, ktoré tieto vlastnosť spĺňajú.

Určovanie množín všetkých bodov danej vlastnosti vyžaduje experimentovanie a logické narábanie s poznatkami, ktoré patria do konštrukčnej a argumentačnej bázy.

Úlohy na precvičovanie

Úloha 3. *Určte množinu všetkých stredov guľových plôch, ktoré prechádzajú danými tromi rôznymi bodmi A, B, C neležiacimi na jednej priamke.*

[Výsledok: Priamka kolmá na rovinu $a \equiv \overleftrightarrow{ABC}$, ktorá prechádza stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC .]

Úloha 4. *Sú dané rovnobežné roviny a, b $(a \neq b)$. Určte množinu všetkých stredov všetkých úsečiek , z nich každá má jeden krajný bod v rovine a a druhý krajný bod v rovine b .*

[Výsledok: Rovina súmernosti d rovnobežná s danými rovinami rovinovej vrstvy určenej rovinami a, b .]

Úloha 5. *Sú dané dve mimobežné priamky a, b. Určte množinu stredov všetkých úsečiek, z ktorých každá má jeden krajný bod na priamke a , druhý krajný bod na priamke b .*

[Výsledok: Rovina súmernosti d najkratšej priečky XY daných dvoch mimobežiek $(d \perp XY)$.]

LITERATÚRA

[1] H' Adamar, J.: Lécons de géomtrie élémentaire. (ruský preklad) Elementarnaja geometria II, Stereometria. Moskva 1958

prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: osedivy@ukf.sk, dvallo@ukf.sk