

ÚVOD DO STEREOMETRIE POMOCOU STAVEBNICE POLYDRON

KITTI VIDERMANOVÁ - ALENA VIZIOVÁ - JANKA MELUŠOVÁ

ABSTRACT. This article deals with the teaching of spatial geometry in upper-secondary education. We describe the results of the exploration study in which we piloted the using of manipulative activities with Polydrón by education of basics concepts of spatial geometry.

Úvod

Učivo priestorovej geometrie je zaradené v štátnom vzdelávacom programe do tematického okruhu Geometria a meranie. V obsahu vzdelávania je zahrnuté:

- Znázorňovanie do roviny, rovnobežné premietanie.
- Hranaté telesá, ich povrch a objem.
- Rezy.
- Oblé telesá, ich povrch a objem, myšlienka odvodenia pomocou Cavalieriho princípu.

Učebný plán tematického celku Stereometria v tomto ročníku je rozvrhnutý nasledovne:

Trieda Septima A (jazyková trieda): 3 hodiny matematiky týždenne, 26 vyučovacích hodín venovaných tematickej oblasti Stereometria.

Trieda Septima B (zameraná na programovanie): 4 hodiny matematiky týždenne, 35 vyučovacích hodín venovaných tematickej oblasti Stereometria.

V učive pre štvorročné gymnázium je oblasť Stereometrie zaradená do 2. ročníka, počet hodín venovaných tejto problematike je 19 vyučovacích hodín.

Rozsah učiva je rovnaký pre všetky tri triedy bez ohľadu na časovú dotáciu.

Cieľové *požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov* z matematiky, oblasť Stereometria – Telesá (od šk. r. 2011/2012):

Obsah:

Pojmy: teleso, mnohosten, vrchol, hrana, stena, kocka, sieť kocky, hranol, kolmý a pravidelný hranol, kváder, rovnobežnosten, ihlan, štvorsten, podstava, výška v štvorstene, guľa, valec, kužeľ, objemy a povrchy telies.

Vlastnosti a vzťahy: vzorce na výpočty objemov a povrchov telies.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti:

Žiak vie:

- rozhodnúť, či daná sieť je sieťou telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- načrtnúť sieť telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- riešiť úlohy, ktorých súčasťou je výpočet objemu, resp. povrchu kocky, kvádra, pravidelného kolmého hranola, pravidelného ihlana, gule, valca, kužeľa a vie pritom nájsť a aktívne použiť vzorce pre výpočet objemov a povrchov telies potrebné pre vyriešenie úlohy.

Vyučovanie priestorovej geometrie začína úvodnou hodinou, na ktorej sa študenti oboznámia so základnými pojmami stereometrie, konkrétne: teleso, mnohosten, pravidelné mnohosteny, sieť mnohostena, konvexné a nekonvexné telesá. V dvoch triedach, Septima A a Septima B nitrianskeho gymnázia na Golianovej ulici sme overovali vhodnosť použitia stavebnice Polydrón vo vyučovaní úvodnej hodiny stereometrie. Zamerali sme sa na dve hľadiská:

- časové hľadisko, t. j. koľko minút z vyučovacej hodiny zaberú jednotlivé úlohy,
- prijatie manipulácie so stavebnicou študentmi na hodinách matematiky.

Stavebnica Polydrón ©

Stavebnica umožňuje ľahké a rýchle konštruovanie geometrických telies a precvičovanie, resp. skúmanie niektorých ich vlastností. Základná školská verzia stavebnice (obr. 1) obsahuje 460 kusov z ôsmich rovinných útvarov: rovnostranný trojuholník (v dvoch veľkostiach, menších 160 ks, väčších 20 ks), rovnoramenný trojuholník (40 ks), pravouhlý rovnoramenný trojuholník (80 ks), štvorec (80 ks), obdĺžnik (20 ks), pravidelný päťuholník (40 ks) a pravidelný šesťuholník (20 ks). Jednotlivé útvary sú vyrábané z umelej hmoty v štyroch farbách: červená, modrá, zelená a žltá. Základná vlastnosť modelov uvedených n -uholníkov spočíva v možnosti jednoduchého spájania pomocou jedinečnej závesnej svorky. Na spojenej hrane je možné vykonať „ohýbanie“. Táto vlastnosť umožňuje využitie týchto modelov pri zhotovovaní rôznych konvexných i nekonvexných telies. Ďalším krokom autorov bolo vytvorenie „plnej“ verzie stavebníc, t.j. rovinné útvary sú nepriehľadné. Rovinné útvary sa doplnili o časti priestorových telies (obr. 2). Tým je umožnená stavba nielen mnohostenov, ale napr. aj gule, valca, atď.)



Obr. 1



Obr. 2

Priebeh vyučovacej hodiny

V triede Septima A sme mali na vyučovacej hodine prítomných 26 študentov, v triede Septima B sme mali delenú hodinu – na jednej hodine 15 študentov, na druhej hodine 14 študentov. V rámci vyučovania sme mali k dispozícii 5 stavebníc Polydrón (zobrazenú na obr.1) a tak sme študentov rozdelili na každej hodine do 5 skupín.

Prvá naša otázka bola: Čo rozumieme v matematike pod pojmom teleso? Odpovede písali študenti na papier. Zaznamenali sme:

- geometrický útvar.
- priestorový (trojrozmerný) útvar.
- priestorový (trojrozmerný) útvar ľubovoľného tvaru a veľkosti.
- priestorový útvar, ktorý má svoje charakteristické vlastnosti a určité rozmery.
- priestorový útvar ohraničený stenami, ktorý má svoj povrch a objem.
- priestorový útvar ohraničený vrcholmi, ktoré sú spájané úsečkami a vytvárajú útvar.
- priestorový trojrozmerný útvar, ktorý môžeš chytiť (vidíme ho).
- dvojrozmerný alebo trojrozmerný útvar definovaný bodom alebo skupinou bodov a ich spojnicami a plochami.
- priestorový útvar, ktorý sa skladá zo strán a hrán.
- predmet alebo útvar, ktorý sa skladá z podstavy a plášťa, má určitý počet stien, vrcholov a hrán.

Porovnajme ich odpovede s definíciou: *Teleso je ohraničená oblasť v priestore a jej hranice*. Vidíme, že niektorí študenti popísali teleso veľmi blízko korektnej definícii.

Po tejto úlohe sme žiakov oboznámili s pojmom mnohosten:

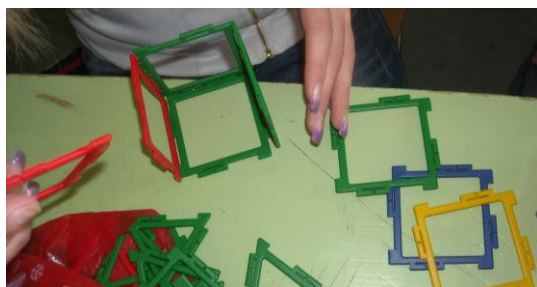
Špeciálnym prípadom telesa je **mnohosten** (označujeme aj ako n -sten). *Je to teleso, ktorého hranica je zjednotením n hraničných mnohouholníkov ($n \in \mathbb{N}, n > 3$) tak, že strana každého jedného z nich je súčasne stranou iného, pričom obidva mnohouholníky neležia v jednej rovine.*

Otázka pre študentov: Aké iné telesá poznáme okrem mnohostenov?

Pokračovali sme úlohou: Z dielov stavebnice Polydrón postavte ľubovoľný mnohosten.

Poznámka. Na túto úlohu sme žiakom dali približne 15 minút čas, pretože v rámci nej prvýkrát pracovali so stavebnicou. Myslíme si však, že na túto aktivitu postačí aj 5 minút.

Žiaci postavili ľubovoľné telesá, medzi nimi sa najčastejšie vyskytovala kocka. To nás neprekvapilo, keďže je to teleso, s ktorým sa študenti najčastejšie stretávajú.



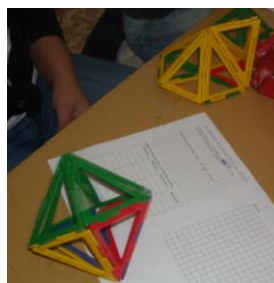
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Jeden študent zhotovil stavbu, ktorá ale nespĺňala definíciu telesa (obr. 7). Túto stavbu sme ukázali ostatným študentom, a položili sme otázku: *Považujeme túto stavbu za teleso?* Študenti hneď zareagovali, že daná stavba nie je teleso, pretože nie je ohraničená.

Na postavených modeloch sme si so študentmi zopakovali pojmy ako podstava a plášť mnohostena, vrcholy, hrany, steny, uhlopriečky (stenové i telesové).

Otázka pre študentov: Čím je kocka taká významná?

Študenti odpovedali, že má všetky steny zhodné štvorce.

Zadefinovali sme **pravidelný mnohosten**: je to taký mnohosten, ktorého všetky steny sú zhodné pravidelné mnohouholníky a každým vrcholom prechádza rovnaký počet hrán, pričom všetky vrcholy ležia na jednej guľovej ploche. Ak študenti nevedia, čo guľová plocha je, oboznámime ich aj s týmto pojmom. Študenti v našich triedach tento pojem ovládali už z analytickej geometrie.

Otázka pre študentov (odpovede písali na papier): Ktoré mnohosteny považujete za pravidelné telesá?

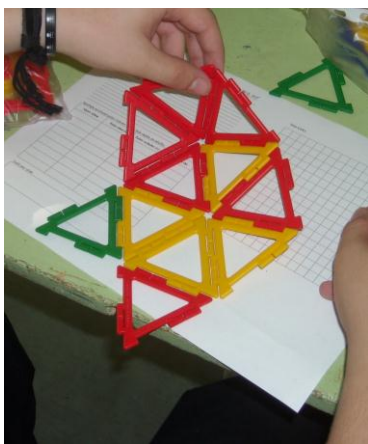
Zo študentských odpovedí vyberáme: kocka, kváder, ihlan, štvorsten, osemsten, dvanásťsten, dvadsaťsten.

Napriek tomu, že sme definíciu pravidelného mnohostena uvideli ešte pred touto otázkou, mnoho študentov sa pomýlilo a časté odpovede boli ihlan a kváder.

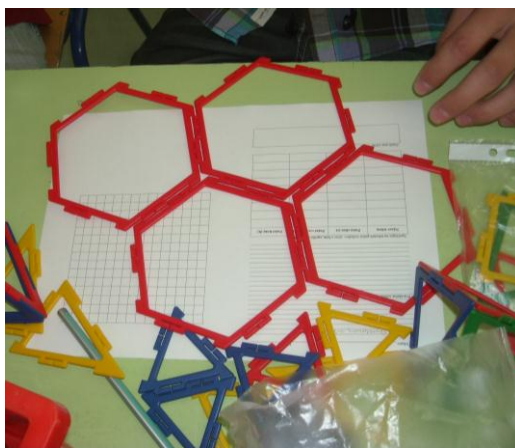
Poznámka: Niektorí študenti uviedli, že sa s pravidelnými mnohostenmi stretli už skôr, a teda ich poznali, nevedeli však, že ich počet je päť, a teda skúšali v ďalšej úlohe nájsť aj iné pravidelné telesá. Keďže ich odpovede na poslednú otázku sme neprečítali pred celou triedou, všetci študenti riešili ďalšiu úlohu bez odpovedí.

Otázka pre študentov: Aké iné telesá môžeme ešte postaviť z jedného druhu mnohouholníkov? Pomocou pravidelných mnohouholníkov zo stavebnice nájdite čo najviac pravidelných mnohostenov. Koľko ich existuje?

V rámci tejto aktivity sme sa pohybovali medzi študentmi a sledovali sme ich prácu. Vyskytol sa problém vyplňania roviny – pri ukladaní rovnostranných trojuholníkov (obr. 8) a pravidelných šesťuholníkov (obr. 9). Študenti sami objavili, že z pravidelných šesťuholníkov pravidelné teleso neposkladajú, a pri stavaní dvadsaťstena musia vybrať jeden trojuholník, aby nevytvárali rovinu.



Obr. 8

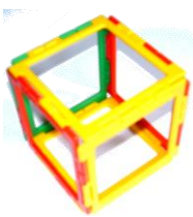


Obr. 9

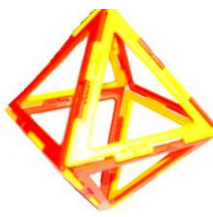
Študenti v rámci každej skupiny vždy našli všetkých päť pravidelných mnohostenov (obr. 10). Oboznámili sme ich s pomenovaním Platónske telesá.



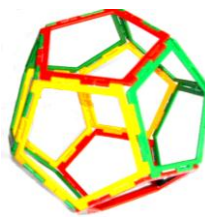
Štvorsten



Kocka



Osemsten



Dvanásťsten



Dvadsaťsten

Obr. 10

Ďalším pojmom, s ktorým sme študentov oboznámili, bol pojem konvexné teleso. **Konvexné teleso** je také teleso, ktoré obsahuje každú úsečku, ktorej krajné body sú ľubovoľné dva body telesa.

Medzi študentmi postavenými mnohostenmi sme našli nekonvexné teleso (obr. 11). Na tomto telese sme študentom názorne predviedli, prečo je toto teleso nekonvexné (obr. 12).



Obr. 11



Obr. 12

Poslednou aktivitou študentov je objavenie vzťahu medzi počtom stien, hrán a vrcholov konvexných mnohostenov - **Eulerovu vetu**.

Študentom sme na tabuľu nakreslili tabuľku a zároveň sme im ju rozdali na papieroch.

Názov telesa	Počet stien (s)	Počet vrcholov (v)	Počet hrán (h)

Otázka pre študentov: Existuje vzťah medzi počtom stien, vrcholov a hrán mnohostenov?

Študenti si zapisovali jednotlivé údaje do svojich papierov a zároveň chodili zapisovať na tabuľu. Vo všetkých triedach objavili študenti vzťah medzi počtom stien, vrcholov a hrán mnohostenov (obr. 13). Zároveň objavili aj to, že tento vzťah pre nekonvexné telesá neplatí.

Poznámka: Na delených hodinách Septimy B sme stihli študentov oboznámiť s dualitou telies kocka, osemsten a dvanásťsten - dvadsaťsten. V triede Septima A sme túto aktivitu už nestihli.

Spočítajte na telesách počet vrcholov, stien a hrán zapíšte do tabuľky.

Názov telesa	Počet stien (s)	Počet vrcholov (v)	Počet hrán (h)
4-sten	4	4	6
koškar	6	8	12
8-sten	8	6	12
12-sten	12	20	30
20-sten	20	12	30
domček	9	9	16
miečo	14	25	40

$$4 + 4 - 2 = 6$$

$$14 - 2 = 12$$

Zistili sme vzťah:

$$s + v - 2 = h$$

Obr. 13: Študentské riešenie

Názory žiakov na využívanie stavebnice Polydron vo vyučovaní matematiky

Študentom sme po hodine rozdali krátky dotazník s troma položkami.

1. otázka: Vyjadrite svoj názor na vyučovaciu hodinu, na ktorej ste pracovali s konštrukčnou stavebnicou Polydron. Odpoveď zdôvodnite.

- Hodina bola aktívna, zaujímavá, pútavá, zábavná.
- Bola poskytnutá kvalitná pedagogická pomoc pri vysvetľovaní učiva a aj pri stavaní.
- Bolo dobré, že sme sa neučili iba teoreticky, a bola to aj zábava.
- Pozitívne hodnotím, naučil som sa o telesách viac, keď som ich mohol sám stavať a popozerať.
- Prvýkrát sa stalo, že na hodine všetci spolužiaci dávali pozor.

2. otázka: Privítali by ste používanie Polydronu na tých vyučovacích hodinách, kde by podľa charakteru učiva bolo možné jeho zaradenie? Odpoveď zdôvodnite.

- Áno, určite. Hodina by bol zaujímavejšia a pútavejšia. Je to skvelá pomôcka na geometriu.
- Samozrejme. Takáto hodina obohatí naše predstavy.
- Áno. Zlepšuje priestorové videnie. Doteraz keď sme na hodinách preberali niečo s telesami, učiteľka vždy iba vysvetľovala, niekedy priniesla aj model telesa, ale vo veľkej triede ten jeden model nestačil.
- Samozrejme. Pri práci s Polydronom sa zapájali do objavovania aj spolužiaci, ktorí inak na hodinách matematiky len pasívne sedia.

3. Bola pre Vás vyučovacia hodina s Polydronom prínosom? Ak áno, odpoveď zdôvodnite.

- Určite áno, pochopil som veľa vecí.
- Naučil som sa stavať telesá, s ktorými som sa predtým nikdy nestretol.
- Naučil som sa mnoho nových vzťahov.

- Myslím si, že som zachytila viac informácií ako na klasickej hodine matematiky.
- Keby nepracujeme so stavebnicou, Eulerovu vetu by som určite neobjavil, pretože tie telesá aj keby som si ťažko predstavil, ešte ťažšie by som v mysli spočítal, koľko majú hrán a vrcholov.
- To sa uvidí na ďalších hodinách matematiky.
- Bolo to zaujímavé, ale nejakým veľkým prínosom nie.

Záver

Zavedenie manipulačnej činnosti so stavebnicou Polydron do výučby nielen zvýšilo motiváciu študentov, ale ako sme sa neskôr dozvedeli od ich vyučujúcej, aj trvácnosť ich poznatkov. Žiaci si pamätali jednotlivé pojmy a vzťahy, a vedeli si ich lepšie predstaviť.

Môžeme skonštatovať, že všetci študenti sa aktívne zapájali do vyučovacieho procesu a použitie stavebnice ich motivovalo pracovať a riešiť zadané úlohy. Z hľadiska časovej náročnosti je potrebné, aby sa s prácou so stavebnicou študenti zoznámili skôr – aj s patentovým spájaním, aj s dielmi stavebnice.

Pre všetkých študentov bola hodina zaujímavá. Za 45 minútovú vyučovaciu hodinu sme stihli v príspevku popísané aktivity. Je na učiteľovi, v akej miere a forme využije túto síce finančne náročnú, ale predsa len dostupnú učebnú pomôcku, ktorú môžeme využiť aj na ďalších hodinách matematiky, napr. pri hľadaní všetkých sietí kocky, pri stavbe kockových telies a hlavolame Soma kocka. Študenti so slabšou priestorovou predstavivosťou si pri niektorých výpočtových úlohách zo stereometrie nevedia predstaviť, prípadne nakresliť plášť telesa. Aj pri riešení takýchto úloh je vhodné využívať stavebnicu Polydron.

LITERATÚRA

- [1] Vallo, D. – Záhorská, J. – Ďuriš, V.: *Manipulačná geometria v škole*. In: *Nové trendy v matematickom vzdelávaní : zborník vedeckých prác*. - Nitra : SPU, 2010. - ISBN 978-80-522-0413-0, S. 153-158.
- [2] Príloha 3A. Štátny vzdelávací program ISCED 3. Citované dňa 10. 11. 2011. Dostupná na: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced3a.pdf
- [3] Židek, O.: *Polydron verzus Geomag*. In: *zborník z medzinárodnej vedeckej konferencie Príprava učiteľov elementaristov v novom storočí*, s. 423 – 427, UPJŠ, Prešov, 2002. ISBN 80-8068-146-5
- [4] Vankúš, P.: *Didaktické hry vo vyučovaní matematiky*. In: *Letná škola z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2009, P-MAT*, Bratislava, ISBN s. 92-94. ISBN 978-80-89370-01-6
- [5] *Cieľové požiadavky na maturitné skúšky*. Citované dňa 10. 11. 2011. Dostupné na: http://www.statpedu.sk/files/documents/katalog%20cielovych%20poziadaviek/matematika_cp.pdf

RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: kvidermanova@ukf.sk

PaedDr. Alena Viziová, PhD.
Gymnázium Golianova
Golianova 68
SK – 949 01 Nitra
e-mail: alena.viziova@gmail.com

PaedDr. Janka Melušová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: jmelusova@ukf.sk